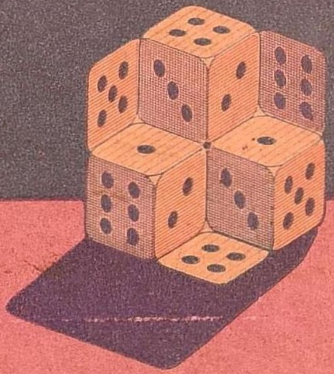
ஈ.எஸ். வென்ட்ஸெல்

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு

(தொடக்கப் படிகள்)



நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு
(தொடக்கப் படிகள்)

Е. С. Вентцель

Теория вероятностей

(Первые шаги)

Издательство «Знание»
Москва

ஈ.எஸ். வென்ட்ஸெல்

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு

(தொடக்கப் படிகள்)

மீர் பதிப்பகம், மாஸ்கோ
நியூசெஞ்சுரிபுக்ஹவுஸ் பிரைவேட்
லிமிடெட், சென்னை

தமிழாக்கம்: அ. நடராஜன்

Probability Theory
(First Steps)
by E. S. Wentzel

На языке тамили

சோவியத்து நாட்டில் அச்சிடப்பட்டது

© Издательство «Знание», 1977

© English translation, Mir Publishers, 1982

© தமிழ் மொழிப்பெயர்ப்பு, மீர் பதிப்பகம், 1989

ISBN 5-03-00-1419-5

பொருளடக்கம்

1. நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு மற்றும் அதன் கணக்குகள் . . 6
2. நிகழ்தகவு மற்றும் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு 56
3. நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் அடிப்படை விதிகள் . . . 102
4. தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் . . . 146
குறிப்பு நூல்கள் 224
துறைச்சொல் விளக்கம் . 226
துறைச்சொல் வரிசை . . . 231

நிகழ்தகவுக்கோட் பாடு மற்றும் அதன் கணக்குகள்

கணித அறிவியல் துறைகளில் நிகழ்தகவு என்பது சிறப்பானதோர் இடத்தை வகிக்கின்றது. தொடர் பின்மை வகைத் தோற்றங்களை ஆளும் சிறப்பு விதிகளைப் பயிலுதா கும் அது. நிகழ்தகவுக் கோட் பாட்டினை நுணுக்கமாகப் பயின் றால், இவ்விதிகளை முழுமையாகப் புரிந்து கொள்ள முடியும். இந்நூலின் குறிக்கோள் அதை விட நிரம்பவும் அடக்கமான ஒன்றே ஆகும்—நிகழ் தகவும் கோட்பாட்டின் அடிப்படை விதிகள், அதன் கணக்குகள் மற்றும் வழிமுறைகள், சாத்தியக் கூறுகள் மற்றும் வரையறைகள் ஆகியவற்

றினை வாசகளுக்கு அறிமுகப்படுத்து வதே ஆகும்.

அறிவுப் புலங்கள் மற்றும் அறிவுத் துறைகள் அனைத்திலும், நடைமுறை வாழ்க்கைக்குப் போதுமான நம்பிக்கைகளே பின்பற்றத் தகுந்தவை என்னும் (புள்ளியியல்) கொள்கையிலான வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்துவது அறிவியல் மேம்பாட்டின் நவீன காலத்தின் சிறப்பியல்பாக உள்ளது. நம்முடைய நாளில் பொறியாளர், அறிவியற் பணியாளர் அல்லது மேலாளர் ஒவ்வொருவரும் நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு பற்றிய தொடக்க நிலை அறிவையாவது பெற்றிருக்க வேண்டும். ஆயினும், தொடக்க நிலையினருக்கு நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு சற்றுக் கடினமானதாகவே உள்ளது என்பது அனுபவவாயிலாகத் தெரிந்திருக்கின்றது. வழக்கமான அறிவியல் முறைகளுக்கு மேலே செல்லாத முறைமைப் பயிற்சியுடையோர் அதன் சிறப்புக் கூறுகளுக்கேற்பத் தகவமைத்துக் கொள்வது என்பது கடினமானதாகவே

இருக்கின்றது. நிகழ்தகவு விதிகளைப் புரிந்து கொள்வது மற்றும் பயன்படுத்துவது ஆகியவற்றின் இந்தத் தொடக்கப்படிகளே நிரம்பவும் கடினமானவையாய் அமைகின்றன. இத்தகைய உளவியல் தடை எவ்வளவுக் எவ்வளவு விரைவாகவும் முன்னதாகவும் நீக்கப்படுகின்றதோ, அவ்வளவுக்கு அவ்வளவு நல்லது.

நிகழ்தகவும் கோட்பாட்டினை முறையாகக் கூறுவதாக வைத்துக் கொள்ளாமல், வாசகரின் தொடக்கப்படிகளை எளிதாக்குவதற்கு நாம் இச்சிறிய நூலில் முயலுவோம். சற்றே கட்டுப்பாடு தளர்ந்த (சிலசமயம் நகைச்சுவை நிரம்பிய) வகையில் கூறுவதாயிருந்தாலும் கூட, இந்நூலைப் படிக்கும் வாசகருக்குச் சில சமயம் ஒருமுகமான முழுக்கவனமும் தேவையாயிருக்கும்.

முதன்முதலில், ''தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகள்'' குறித்துச் சிறிது கவனிப்போம். முன்கூட்டியே அறிவிக்கப்பட முடியாத விளைவுகளை உடைய **பரிசோதனை** (அல்

லது ''தேர்வாய்வுச் சோதனை'' அல்லது முயற்சி) ஒன்றைக் கற்பனை செய்து கொள்ளவும். எடுத்துக்காட்டாக, காசு அல்லது நாணயம் ஒன்றைச் சுண்டிவிடுகிறோம். அது ''தலை''யாக விழுமா அல்லது ''பூ''வாக விழுமா என்பதை முன்னதாகவே சொல்வது சாத்தியமில்லை. மற்றோர் எடுத்துக்காட்டு: சீட்டுக் கட்டு ஒன்றிலிருந்து சீட்டு ஒன்றை நாம் உருவி எடுக்கின்றோம். அது எந்த வகையினைச் சேர்ந்ததாக இருக்கும் என்பதைச் சொல்வது சாத்தியமில்லை. இன்னோர் எடுத்துக்காட்டு: கால—அட்டவணை தெரியாது, பேருந்து நிற்குமிடம் ஒன்றிற்கு நாம் வருகின்றோம். நமக்குத் தேவையான பேருந்திற்காக நாம் எவ்வளவு நேரம் காத்திருக்க வேண்டியிருக்கும்? நம்மால் முன்னதாகச் சொல்ல முடியாது. அது வாய்ப்பு நேர்வினை அல்லது நிகழ்ச்சியின் போக்கினைப் பொறுத்திருக்கின்றது என்றே கொள்ள வேண்டும். ஆலை ஒன்றின் தரக்கட்டுப்பாடுத்

துறையினால் எத்தனை உருப்படிகள் தரத்திற்கேற்ப அமையவில்லை என்று விலக்கப்படும்? அதையும் நம்மால் முன்கூட்டியே குறிப்பிட முடியாது.

இந்த எடுத்துக்காட்டுகள் யாவும் தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளைச் சேர்ந்தவை ஆகும். அவை ஒவ்வொன்றிலும் பரிசோதனையின் விளைவை முன்னதாக அறிவிக்க முடியாது. முன்னறிவிக்க முடியாத அத்தகைய பரிசோதனைகள் பல தடவை மீண்டும் மீண்டும் நிகழ்த்தப் பெற்றால், அவற்றின் விளைவு ஒவ்வொரு தடவையும் மாறுபடும். எடுத்துக்காட்டாக, நிரம்பவும் நுட்பமா தராசு ஒன்றில் ஒரு பண்டத்தினை நிறுத்தால், அதன் எடைக்கு வெவ்வேறான மதிப்பளவுகளை நாம் பெறுவோம். இதற்கு என்ன காரணம்? பரிசோதனைகள் நிகழ்த்தப் பெறும் நிலைகள் ஒரே மாதிரியாக இருப்பவை போல் தோன்றினாலும், உண்மையில், ஒவ்வொரு பரிசோதனையிலும் அவை மாறுபடுகின்றன.

ஒவ்வொரு பரிசோதனையின் விளை வும், புரிந்து கொள்வதற்குக் கடின மானவையாகவும் விளைவுகளின் உறுதியின்மைக்குக் காரணமாகவும் உள்ள சின்னஞ்சிறிய கூறுகள் பலவற்றினைச் சார்ந்திருக்கின்றது.

விளைவு முன்னதாகத் தெரியாத, அதாவது, தொடர்பின்மை. வகையிலான பரிசோதனை ஒன்றை நாம் கவனிக்கலாம். பரிசோதனையின் விளைவாக நேரிடும் அல்லது நேரிடத் தவறும் எந்த நிகழ்ச்சியினையும் நாம் **தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சி** என அழைப்போம். எடுத்துக்காட்டாக. காசு ஒன்றைச் சுண்டும் பரிசோதனையில் நிகழ்ச்சி A ''தலை'' தோன்றுவது—நிகழலாம் (அல்லது நிகழாமல் இருக்கலாம்). இரண்டு காசுகளைச் சுண்டுவது என்னும் பிறிதொரு பரிசோதனையில் நிகழக் கூடிய (அல்லது நிகழ முடியாத) நிகழ்ச்சி B என்பது ஒரே சமயத்தில் ஒரு ''தலை''கள் தோன்றுவதாகும். மற்றோர் எடுத்துக்காட்டு. சோவியத் ஒன்றியத்தில் மக்களுக்கு நிரம்

பவும் பிடித்தமான விளையாட்டு ஒன்று—விளையாட்டுப் பரிசுச் சீட்டு எனப்படுவது—இருக்கிறது. வழக்க மாக வெவ்வேறான விளையாட்டு வகைகளைக் குறிப்பிடும் 49 எண் கள் கொண்ட சீட்டு ஒன்றை வாங்கி, அதில் ஏதாவது ஆறு எண்களைக் குறிக்கின்றீர்கள். குலுக்கல் நாளன்று— இது தொலைக் காட்சியில் காண்பிக் கப்படுகிறது—பரிசு வீட்டு உருளை களிலிருந்து ஆறு பந்துகள் எடுக்கப் பட்டு வெற்றி பெற்றவையாக அறி விக்கப்படுகின்றன. பரிசு, ஊகிக்கப் பட்ட என்களின் (3, 4, 5 அல்லது 6) எண்ணிக்கையைப் பொறுத்துள் ளது. நீங்கள் சீட்டு ஒன்றை வாங்கி, அதில் 49 எண்களுள் 6 எண்களைக் குறித்திருப்பதாக வைத்துக் கொள் ளவும். இந்தப் பரிசோதனையில் அடி காணப்படும் நிகழ்ச்சிகள் நிகழலாம் (அல்லது நிகழாமல் இருக்கலாம்):

A—சீட்டில் குறிக்கப் பெற்ற ஆறு எண்களுள் மூன்று எண்கள், வெளியிடப் பெற்ற மூன்று எண்க ளுடன் ஒத்திருக்கலாம் (அதாவது,

மூன்று எண்கள் ஊகித்தறியப்படுகின்றன).

B—நான்கு எண்கள் ஊகித்தறியப்படுகின்றன.

C—ஐந்து எண்கள் ஊகித்தறியப்படுகின்றன; இறுதியாக, நிரம்பவும் மகிழ்ச்சியளிக்கும் (ஆனால், பெரும்பாலும் நகழ்வதற்கு வாய்ப்பில்லாத) நிகழ்ச்சி;

D—ஆறு எண்களும் ஊகித்தறியப்படுவதாகும்.

எனவே, பல்வேறு நிகழ்ச்சிகள் நிகழக் கூடிய நிகழ்வியல் பின் (நிகழ்தகவின்), அளவினை நிர்ணயிப்பதையும், அவற்றின் நிகழ்தகவுகளுக்கேற்ப அவற்றை ஒப்பிடுவதையும், நடைமுறை வாழ்விற்குப் போதுமான நம்பிக்கைகளே பின்பற்றத் தக்கவை என்னும் கொள்கை மதிப்பீடுகளின் அடிப்படையில் தொடர்பின்மை வகைத் தோற்றங்களின் விளைவுகளை **முன்னறிவிப்பதையும்**—இதுவே பிரவானமானது — நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு சாத்தியமாக்கியிருக்கின்றது.

''எனக்கு ஒன்றும் விளங்கவில்லை!'' என்று எரிச்சலுடன் நீங்கள் எண்ணலாம். ''தொர்பின்மை வகையிலான நிகழ்ச்சிகளை முன்னறிவிக்க முடியாது என்று சாற்று முன் தான் கூறினீர்கள். இப்போதோ—''நம்மால் முன்னறிவிக்க முடியும்!'' என்று சொல்லுகிறீர்கள்''.

சற்று நிதானியுங்கள். நிகழ்வியல்பு அதிக அளவுள்ள, அதாவது, அதிக அளவு நிகழ்தகவுடன் கூடிய தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளையே முன்னறிவிக்க முடியும். எந்த நிகழ்ச்சிகள், நிகழ்வியல்பு அதிக அளவுள்ள வகையினை சேர்ந்தவை என்பதைத் தீர்மானிப்பதைச் சாத்தியமாக்குவது நிகழ்தகவுக் கோட்பாடே ஆகும்.

நிமழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவை இப்போது ஆராய்வோம். தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகள் யாவும் ஒரே அளவு நிகழ்தகவு உடையன அல்ல என்பதும், அவற்றுள் சில அதிக அளவு நிகழ்தகவு உடையன என்பதும், சில குறைந்த அளவு நிகழ்தகவு உடையன என்பதும் தெளிவு. பகடை

ஒன்றைக் கொண்டு செய்யப்படும் பரி சோதனை ஒன்றைக் கவனிப்போம். இப்பரிசோதனையின் அடியிற் காணும் இரு விளைவுகளுள் எது அதிக அள விற்கு நிகழ்தகவு உள்ளது என்று நீங் கள் நினைக்கிறீர்கள்:

A—ஆறு புள்ளிகள் தோன்று வதா அல்லது

B—இரட்டைப் படை எண்ணிக் கை உடைய புள்ளிகள் தோன்று வதா?

இந்தக் கேள்விக்கு உடனே உங் களால் விடை சொல்ல முடியவில்லை என்றால் அது மோசமானதே. ஆனால், இத்தகைய நூல் ஒன்றினை படிப்பவரால் இத்தனை எளிதான கேள்விக்கு விடை கூற முடியவில்லை என்னும் நிகழ்ச்சி பெருமளவிற்கு நிகழ முடியாததே (அதாவது, குறை வான நிகழ்தகவுடன் கூடியது!). மாறாக, வாசகர் உடனே ''நிகழ்ச்சி B அதிக அளவிற்கு நிகழ்தகவு கொண் டதாகும் என்பதில் ஐயமில்லை!'' என்று மறுமொழி கூறுவார் என நாம் உறுதியாகச் சொல்ல முடியும்.

அவர் உரைத்தது சரியானதாகவே இருக்கும்; ஏனெனில், சாமானிய அறிவுள்ள எவரிடத்திலுமே ''நிகழ்ச்சி ஒன்றினுடைய நிகழ்தகவு'' என்னும் சொல்லைப் பற்றிச் சாதாரணமாகப் புரிந்து கொள்ளுதல் என்பது உள்ளார்ந்து இருக்கின்றது. நம்மைச் சுற்றிலும் தொடர்பின்மை வகைத் தோற்றங்கள் தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகள் சூழ்ந்திருக்கின்றன. குழந்தைப் பருவத்திலிருந்தே நமது செயல்களைத் திட்டமிடுகையில், நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவின் அளவை மதிப்புடவும், அவற்றினிடையே நிகழ்தகவுள்ளவை, குறைந்த அளவிற்கு நிகழ்தகவுள்ளவை, சாத்தியமே இல்லாதவை ஆகியவற்றைப் பிரித்துப் பார்க்கப் பழக்கப்பட்டு வந்திருக்கின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு புத்தகத்தில் 500 பக்கங்கள் உள்ளன; அவற்றுள் ஒன்றினில் நமக்குத் தேவையான சூத்திரம் இருக்கின்றது. வரிசையோ, தொடர்போ எதுவுமின்றி நாம் புத்தகத்தைத் திறக்கும் போது இந்தப் பக்கமே வரும் என்று நாம்

முனைப்பாக எதிர்பார்க்க முடியுமா? முடியாது என்பது தெளிவு. இந் நிகழ்ச்சி சாத்தியமானது; ஆனால்நேரு வதற்கு வாய்ப்பிலாதது ஆகும்.

இப்போது, தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை எவ்வாறு மதிப்படுவது (கணக்கிடு வது) என்பதை முடிவு செய்வோம். முதன்முதலில், அளவின் அலகு ஒன்றை நாம் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டில் அத்தகைய அலகு **நிச்சயமான நிகழ்வு ஒன்றின் நிகழ்தகவு** ஆகும். குறிப்பிட்டதொரு பரிசோத னையில் ஒரு நிகழ்ச்சி கட்டாயமாக அல்லது தவறாமல் நிகழும் என்றால், அது **நிச்சயமான** நிகழ்ச்சி என்று அழைக்கப் பெறுகின்றது. எடுத்துக் காட்டாக, பகடை ஒன்றின் மீது ஆறு புள்ளிகளுக்கு மேற்படாமல் தோன் றுவது என்பது ஒரு நிச்சயமான நிகழ்ச்சியாகும். நிச்சயமானதொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவின் மதிப்பளவு ஒன்று என்று வைத்துக் கொள்ளப்ப டுகிறது; **சாத்தியமே இல்லாத** (அதா

வது, நிகழவே முடியாது என்றும்) நிகழ்ச்சி ஒன்றிற்கு, அதாவது, எடுத்துக் கொள்ளப்பெற்ற பரிசோதனையில் ஒரு போதும் நடைபெறவே முடியாத நிகழ்ச்சி ஒன்றிற்கு (எடுத்துக் காட்டு: பகடை ஒன்றின் முகத்தின் மீது ''நெகடிவ்'' அல்லது பூஜ்யத்திற்குக் குறைவான எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள் தோன்றுவது என்பது), நிகழ்தகவின் மதிப்பு பூஜ்யம் என வழங்கப் பெறுகின்றது.

தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சி என்பதன் நிகழ்தகவினை P(A) எனக் குறிப்பிடுவோம். அது எப்போதும் பூஜ்யத்திற்கும் ஒன்றிற்கும் இடையில் அமைந்திருக்கும் என்பது தெளிவு:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \qquad (1.1)$$

இது நிகழ்தகவின் மிக முக்கியமான இயல்பு என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்! கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணும் போது நிகழ்தகவின் மதிப்பளவு ஒன்றைக் காட்டிலும் அதிக மதிப்புள்ளதாய் இருந்தால் (இன்னும் மோசமான விவரம் என்னவெ

னில், பூஜ்யத்திற்கும் குறைவான மதிப்புடையதாய் இருப்பதாகும்), உங்கள் ஆய்வு தவறானது என நிச்சயமாக நீங்கள் கருத முடியும். நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் மீதான சோதனை ஒன்றில் எனது மாணவர்களுள் ஒருவருக்கு ஒரு சமயம் P (A) = 4 என்னும் விடை கிடைத்து, அதற்கு அவர் பின்வருமாறு விளக்கம் எழுதினார்: ''நிகழ்ச்சியானது நிகழ்தகவு வாய்ப்பை விட அதிக அளவுக்கு நிகழ்தகவில்புடையது என்பதை இது குறிக்கின்றது''. (பின்னர், அவர் தமது அறிவினை மேம்படுத்திக் கொண்டு, அத்தகைய தோராயமான பிழைகளைச் செய்யாமலிருந்தார்.)

நிற்க, நமது விவாதத்திற்கு மீண்டும் வருவோம். ஆக, சாத்தியமே இல்லாத நிகழ்ச்சி ஒன்றின் நிகழ்தகவின் மதிப்பு ஒன்றாகவும், நிச்சயமான நிகழ்ச்சி ஒன்றின் நிகழ்தகவின் மதிப்பு பூஜ்யமாகவும், தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சி A என்பதன் நிகழ்தகவின் மதிப்பு P(A) என்பது பூஜ்யத்திற்கும் ஒன்றுக்கும் இடையிலுள்

ஓர் எண்ணாகவும் இருக்கின்றது. நிச்சயமான நிகழ்ச்சி ஒன்றின் நிகழ்தகவின் எந்தப் பகுதி (அல்லது பங்கு) நிகழ்ச்சி A—இன் நிகழ்தகவை நிர்ணயிக்கிறது என்பதை இந்த எண் குறிப்பிடுகின்றது.

தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை (எளிமையான சில கணக்குகளில்) எப்படி நிர்ணயிப்பது என்பதை நீங்கள் விரைவில் தெரிந்து கொள்ளுவீர்கள். ஆனால் இதை ஒத்திப் போட்டு விட்டு நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு மற்றும், அதன் பயன்முறை வழிகள் ஆகியவை பற்றிய சில முக்கியமான பிரச்சினை குறித்து இப்போது ஆராய்வோம்.

''நிகழ்தகவுகளை எப்படிக் கணக்கிடுவது என்பதை நாம் ஏன் அறிந்து கொள்ள வேண்டும்?'' என்னும் கேள்வியினைப் பற்றி முதலில் நாம் கவனிப்போம்.

வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிகள் நேருவதற்கான நிகழ்வியல்பின் அளவுகளை மதிப்பிடுவதற்கும். அவற்றை ஒப்பிடுவதற்கும் முடியும் என்பதே, நிச்சய

மாக, ஆர்வமூட்டும் ஒன்றேயாகும். ஆனால், நமது குறிக்கோள் முற்றிலும் வேறானது—அதாவது, கணக்கிடப் பெற்ற நிகழ்தகவுகளை, தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளுடன் சம்பந்தப்பட்டுள்ள பரிசோதனைகளின் விளைவுகளை **முன்னறிவிப்பது** ஆகும். தொடர்பின்மை வகையினைச் சேர்ந்தனதவாயிருந்தாலும், முன்னறிவிக்கக் கூடிய விளைவுகளைக் கொண்ட அத்தகைய பரிசோதனைகள் இருக்கவே செய்கின்றன. திட்பநுட்பமாக இல்லா விட்டாலும் கூட தோராயமாகவாவது முன்னறிவிக்கக் கூடியவை உள்ளன. முழு நிச்சயத்துடன் இல்லா விட்டாலும் கூட, **ஏறக்குறைய முழுதான** ஒரு ''செயல் அளவு நிச்சய''த்துடன் முன்னறிவிக்க முடியும். நிகழ்வுதகவுக் கோட்பாட்டின் மிக முக்கியமான பிரச்னைகளில் ஒன்று, ஒரு சிறப்பு வகை நிகழ்ச்சிகளை — **செயலளவு** — **நிச்சயமான நிகழ்ச்சி** களையும் **செயலளவு சாத்தியமே இல்லாத** நிகழ்ச்சிகளையும் தெளிவு படுத்திக் காட்டுவதாகும்.

நிகழ்ச்சி 17 என்பது, அதன் நிகழ் தகவின் மதிப்பு ஒன்றிற்குத் திட்டமாகச் சமமாயில்லாத போனாலும் ஒன்றுக்கு நிரம்பவும் நெருங்கிய மதிப்புடையதாயிருந்தால், அது செயலளவு—நிச்சமானது:

$$P(A) \approx 1$$

அங்ஙனமே, நிகழ்ச்சி என்பது, அதன் நிகழ்தகவின் மதிப்பு பூஜ்யத்திற்கு நெருங்கியதாயிருந்தால் அது செயலளவு—சாத்தியமே இல்லாதது:

$$P(A) \approx 0$$

எடுத்துக்காட்டு ஒன்றினை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள்: 100 ஆட்கள் காசைச் சுண்டும் ஒரு பரிசோதனை. நிகழ்ச்சி A என்பது, அனைவரிடமும் ஒரே சமயத்தில் ''தலை''யே தோன்றுவதைக்குறிப்பதாகும். இந்தநிகழ்ச்சி சாத்தியமானதா? கோட்பாட்டளவில், ஆம், அது சாத்தியமானதே ஆகும். அத்தகைய ''அதிர்ஷ்ட இயற்கைப் பிறழ்வு'' ஒன்றை நாம் கற்

பனை செய்து கொள்ள முடியும். எனினும், இந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு புறக்கணித்து விடக் கூடிய அளவிற்குக் குறைந்த மதிப்புடையது (பின்னர், அதை நாம் கணக்கிட்டு, அது $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ ஆக இருப்பதை நாம் காணப் போகிறோம்). நிகழ்ச்சி A என்பது செயலளவு—சாத்தியமே இல்லாதது என நாம் முடிவு செய்யலாம். நிகழ்ச்சி A க்கு எதிரிடையான நிகழ்ச்சி, A நிகழ்வதில்லை என்பது (அதாவது, ''பூ'' ஒரு தடவையாவது தோன்றுகிறது என்பது) செயலளவு—நிச்சயமானதாய் இருக்கின்றது.

நிகழ்தகவு பற்றிய கணக்குகளில், செயலளவு—சாத்தியமே இல்லாத நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் செயலளவு—நிச்சயமாக நிகழ்பவை இரட்டையாகவே, இரண்டு இரண்டாகவே எப்போதும் நிகழ்கின்றன. குறிப்பிட்ட பரிசோதனையில் நிகழ்ச்சி A செயலளவு—நிச்சயமானது என்று இருக்கும் போது, A—க்கு எதிர்நிகழ்ச்சி செயலளவு—சாத்தியமே இல்லாதது அவ்வாறே, A—க்கு எதிர்நிகழ்ச்சி

செயலளவு — நிச்சயமானதாயிருந்தால், நிகழ்ச்சி A செயலளவு—சாத்தியமே இல்லாததாயிருக்கிறது.

சில கணக்கீடுகளைச் செய்து, எடுத்துக்கொள்ளப் பெற்ற பரிசோதனையில் நிகழ்ச்சி செயலளவு—நிச்சயமானது என்பதை நிறுவியிருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். இது எதைக் குறிக்கின்றது? இப்பரிசோதனையில் நிகழ்ச்சி A நிகழ்வதை நாம் **முன்னறிவிக்க** முடியும் என்பதையே இது குறிப்பிடுகின்றது! நாம் இதனை ''முற்றும் நிச்சயமானதாக'' என்று முன்னறிவிக்க முடியாது, ''ஏறத்தாழ நிச்சயமானதாக'' என்று தான் முன்னறிவிக்க முடியும் என்பது என்னவே உண்மையே. ஆயினும், தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளையே நாம் கவனிப்பதால், அது கூட ஒரு மாபெரும் சாதனையே ஆகும்.

''கம்ப்யூட்டர்'' எனப் பெறும் கணிப்புப் பொறி அல்லது கணிப்பான் ஒன்றினால் செய்யப்படும் கணக்கீடுகளில் ஏற்படக்கூடிய பெரும் அளவிற்குச் சாத்தியமான பிழை, ''லாரி''

கள் (சாமான்களை ஏற்றிச் செல்லும் தானியங்கிப் பார வண்டிகள்) பலவற்றைக் கொண்ட அமைப்பு ஒன்றிற்குத் தேவைப்படும் உதிரி உறுப்புக்களின் பெரும் (அதிகப்பட்ச) மற்றும் சிறும குறைந்த பட்ச எண்ணிக்கை, இலக்கு ஒன்றின் மீது விழும் குறி தவறாத அடிகள், மற்றும் ஆலை ஒன்றினில் தயாரிக்கப்படும் குறைபாடுள்ள பண்டங்கள் ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கைக் கான வரம்பு முதலியவற்றை குறிப்பிட்ட ஓரளவு நம்பிக்கையுடன் முன்னறிவிப்பதை நிகழ்தகவு சாத்திய மாக்குகிறது.

ஒரே ஒரு தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சியை மட்டுமே கவனிக்கும் போது, அத்தகைய முன்னறிவிப்பு கள் சாத்தியமில்லை, **பெரும் எண்ணிக்கையுள்ள** ஒரே மாதிரியன தொடர்பின்மை நிகழ்ச்சிகளைக் கவனிக்கும் போதே பொதுவான அவை சாத்தியமாகின்றன என்பதை நாம் குறிப்பிட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, காசு ஒன்றினை ஒரு தரம் சுண்டியெறியும் போது, ''பூ'' விழுமா

அல்லது ''தலை'' விழுமா என்பதை முன்னறிவிப்பது சாத்தியமில்லை. ஆனால், மிகப் பெரிய ஓர் எண்ணிக்கை அளவிற்கு (500 அல்லது 1000 தடவை) அவற்றை மீண்டும் மீண்டும் செய்தால், ''தலை'' விழும் எண்ணிக்கைக்கான வரம்பினை நாம் முன்னறிவிக்க முடியும் (அம்மாதிரியான முன்னறிவிப்புகளின் எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன; ''முற்றும் நிச்சயமான'' என்று இல்லாமல் ''ஏறத்தாழ நிச்சயமான'' என்னும் வகையில் தான் அம் முன்னறிவிப்புகள் செய்யப்பட்டுள்ளன; மேலும், அவை எப்போதுமே நிகழும் என்று சொல்வதற்கில்லை; பெரும்பாலானவற்றில் மட்டுமே அவை உண்மையாயிருக்கின்றன).

''ஒரு நிகழ்ச்சியினை செயலளவு நிச்சயமானது எனக் கருதுவதற்கு நிகழ்தகவின் மதிப்பு எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?'' என்னும் கேள்வி சில சமயம் சமுகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, அது 0.99 ஆக இருக்க வேண்டுமா? அல்லது, ஒருக்கால் 0.995 ஆக

இருக்க வேண்டுமா? அல்லது, அதை விட அதிகமாக 0.999 ஆக இருக்க வேண்டுமா?

இந்தக் கேள்விக்கான விடையைத் தனியானதொரு நிலையில் சொல்ல முடியாது. எல்லாம், நாம் கருதும் நிகழ்ச்சி நிகழ்வது அல்லது நிகழாமல் இருப்பது என்பதன் விளைவுகளைப் பொறுத்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டாக, குறிப்பிட்ட தொருவகைப் போக்குவரத்துச் சாதனத்தைப் பயன்படுத்தினால், 10 நிமிஷங்கள் தாமதத்திற்கு மேற்படாமல் வேலைக்குச் செல்வோம் என்று முன் கூட்டியே நாம் அறிவிக்க முடியும். இந்த நிகழ்ச்சியை நாம் செயலளவு —நிச்சயமானது என்று கருத முடியுமா? ஆம், நாம் கருத முடியும் என்றே நினைக்கிறேன்.

ஆனால். ''விண்வெளிக் கப்பல் ஒன்று, செலுத்தப்பட இடத்தில் வெற்றியுடன் இறங்குதல்'' என்னும் நிகழ்ச்சி, அதே நிகழ்தகவு மதிப்பான 0.99 அளவுடன் கூடியது என்பது உறுதிப்படுத்தப் பெற்றால் அதைச் செய

லளவு—நிச்சயமானது என நாம் கருத முடியுமா? முடியாது என்பது வெளிப் படை.

நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் வழி முறைகளைப் பயன்படுத்திச் செய்யப் படும் எந்த முன்னறிவிப்பிலும் இரு சிறப்புக் கூறுகள் எப்போதும் இருப் பதை நினைவுபடுத்திக் கொள்ளவும்.

1. முன்னறிவிப்புகள் ''முற்றிலும் நிச்சயமான'' என்று அல்லது, ''ஏறத் தாழ நிச்சயமான'' என்னும் அளவில் தான், அதாவது, உயர்ந்த அளவு நிகழ்தகவுடன் தான் செய்யப்படுகின் றன.

2. இந்த உயர்ந்த அளவு நிகழ் தகவின் மதிப்பு (அதாவது, ''நம்பிக் கையின் அளவு'') ஆய்வாளராலேயே ஏறத்தாழத் தன்னிச்சையாக, ஆனால், வெற்றிகரமான முன்னறிவிப்பின் முக் கியத்தைக் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டு பகுத்தறிவுக்கேற்ப வைத் துக் கொள்ளப்படுகிறது.

இந்த வரையறைகள் அனைத்திற் கும் பிறகும் கூட, நிகழ்தகவுக் கோட் பாட்டில் உங்களுக்கு முற்றிலும்

ஏமாற்றமில்லை என்றால், இந்த நூலை மேற்கொண்டு படித்து, தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுவதற்கான எளிய வழிமுறைகள் சிலவற்றைத் தெரிந்து கொள்ளுங்கள். இவ்வழிமுறைகள் பற்றி ஓரளவிற்கு நீங்கள் ஏற்கனவேயே தெரிந்து கொண்டிருக்கலாம்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டி எறியும் போது, ''தலை''கள் தோன்றுவதன் நிகழ்தகவு என்ன? இக்கேள்விக்கு தயவுசெய்து விடை கூறவும்.

ஏறக்குறைய நிச்சயமாக (உயர்ந்த அளவு நிகழ்தகவு மதிப்புடன்), நீங்கள் உடனே என்று விடை கூறுவீர்கள். காசு சமநிலையோடு இருந்து, ''காசு ஓரத்தின் மீது நிற்பது'' என்பது செயலளவு—சாத்தியமே இல்லாதது என்று ஒதுக்கி விட்டால், நீங்கள் கூறியது சரியாக இருக்கும். (''$\frac{1}{2}$'' என்னும் விடையினைச் சொல்வதற்கு முன் சிந்திப்பவர்கள் வெறும் போலி ஆட்சேபத்தை எழுப்புபவர்களே. சிலசமயம், அது ஆழ்ந்த சிந்தனை

யைக் குறிப்பதாக இருக்கும்; ஆனால், பெரும்பாலும், விழிப்பாகவும் நுட்பமான கவனத்துடன் இருப்பதாகவும் காண்பித்துக் கொள்ளும் ஓர் இயல்பினைக் குறிப்பதாகவே அது உள்ளது.

பகடை ஒன்றை உருட்டும் போது, ஆறு புள்ளிகள் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது? என்னும் வேறொரு வினாவிற்கும் நீங்கள் எளிதில் விடை கூற முடியும். பெரும்பாலும் நிச்சயமாக, உங்கள் விடை "$^1/_6$" என்பதாக இருக்கும் (பகடை குறைபாடு எதுவும் இல்லாதது; விளிம்பின் மீதோ அல்லது ஒரு மூலையின் மீதோ அதனால் நிற்க இயலாது என்னும் அதோ நிபந்தனை இருப்பதாக வைத்துக் கொள்ளப்படும்).

இந்த விடையினை எவ்வாறு அடைந்தீர்கள்? பரிசோதனையின் சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கையை (ஆறு உள்ளன) நீங்கள் கணக்கிட்டீர்கள் என்பது தெளிவு. சமச்சீர் காரணமாக அம்முடிவுகள் சம அளவில் நிகழக் கூடியனவாயுள்ளன.

அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் நிகழ்தகவு $^1/_6$ என்னும் மதிப்பை அளிப்பது இயல்பே ஆகும்; அவ்வாறு நீங்கள் அளித்தால் நீங்கள் செய்தது முற்றிலும் சரியே.

இப்போது, இன்னும் ஒரு வினா: அதே பரிசோதனையில் நான்கு புள்ளிகள் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? உங்கள் விடை ''$^1/_3$'' ஆக இருக்கும் என்று நான் நினைக்கிறேன். அவ்வாறு ஆனால், நீங்கள் கூறியது மீண்டும் சரியே. உண்மையில், ஆறு சம அளவுச் சாத்தியமான முடிவகளிலிருந்து, இரண்டு (ஐந்து மற்றும் ஆறு புள்ளிகள்) இந்நிகழ்ச்சியினை ''சுட்டிக் காட்டுவதாக''ச் சொல்லப்படுகிறது. இரண்டை ஆறினால் வகுத்தால் சரியான விடையான கிடைக்கின்றது.

நல்லது, உங்களை அறியாமலேயே, **நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுவதற்குப் பண்டைய முறை மாதிரியினைப்** பயன்படுத்தி விட்டீர்கள்.

உண்மையில், பண்டைய மாதிரி என்பது எது? இதோ விளக்கம்.

முதலில், பல்வேறு துறைச் சொற்களை அறிமுகப்படுத்துவோம். (வேறு துறைகளைப் போலவே, நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டில் துறைச் சொற்கள் பற்றிய இயல் முக்கியமானதொரு பங்கை வகிக்கின்றது).

A_1, A_2...... A_n என்று, சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கையை உடைய பரிசோதனை ஒன்றை நாம் நிகழ்த்துவதாக வைத்துக் கொள்ளலாம்.

A_1, A_2.... A_n ஒன்றை ஒன்று தவிர்த்தனவாய் இருந்தால், அவை **ஒன்றனுக்கு ஒன்று விலக்கம் கொண்டனவாய்** அதாவது, ஒன்றை ஒன்று சாராதனவாய் இருப்பதாகச் சொல்லப்படுகின்றது; அதாவது, அவற்றுள் ஒரே சமயத்தில் நிகழக் கூடிய இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் இல்லை.

A_1, A_2, ... A_n சாத்தியமான எல்லா விளைவுகளையும் அடக்கியனவாய் இருந்தால், அவை யாவும் **அளாவியவை** என அழைக்கப்படுகின்றன; அதாவது பரிசோதனையில் விளைவாக ஒன்று

கூட நிகழவில்லை என்பது சாத்திய மில்லை.

A_1, A_2 ....A_n ஆகியவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்குச் சம அளவுச் சாத்தியக் கூறினை (நிகழ்தகவினை) பரிசோதனை நிலைகள் அளிப்பதாயிருந்தால், அவை **சம அளவில் நிகழ்க்கூடி**யவை எனக் குறிக்கப் படுகின்றன.

A_1, A_2....A_n மூன்று இயல்புகளையும் கொண்டிருந்தால், அதாவது, அவை *(1)* ஒன்றனுக்கு ஒன்று விலக்கம் கொண்டனவாகவும், *(2)* யாவும் அளாவியனவாகவும், *(3)* சம அளவில் நிகழக் கூடியனவாகவும் இருந்தால், அவை **பண்டைய முறை மாதிரி** என்பதனால் விவரிக்கப்படுபவை ஆகும். சுருக்கமாக அவற்றை நாம் **தற்செயல் நேர்வுகள்** என்று அழைப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ''காசு ஒன்றினைச் சுண்டி எறிவது'' என்னும் பரிசோதனையினை, பண்டைய முறை மாதிரி என்பதனால் விவரிக்க முடியும்; ஏன் எனில், ''தலை''கள் விழு

வது என்னும் நிகழ்ச்சி A_1 மற்றும் ''பூ''க்கள் விழுவது என்னும் நிகழ்ச்சி A_2 ஆகிய இரண்டும் ஒன்றனுக்கு ஒன்று விலக்கம் கொண்டனவாயும், யாவும் அளாவினவாயும், சம அளவில் நிகழக் கூடியனவாயும் அமைந்துள்ளன; அதாவது, அவை தற்செயல் நேர்வு களின் ஒரு தொகுதியாக அமைந்துள் ளன.

''பகடையை உருட்டுவது'' என்னும் பரிசோதனையும் பண்டைய முறை மாதிரியினால் விவரிக்கப்படு கின்றது; ஒருமுகத்தின் மீதுள்ள புள் ளிகளின் எண்ணிக்கைக்கேற்ப $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$—எனக் குறிப்பிடக் கூடிய, ஒன்றனுக்கு ஒன்று விலக்கம் கொண்டவையான, யாவும் அளவின வான, சம அளவில் நிகழக் கூடிய வையான ஆறு விளைவுகள் இருக்கின் றன.

இப்போது' 'இரண்டு காசுகளை'' சுண்டி எறியும் பரிசோதனை ஒன்றை எடுத்துக்கொண்டு, சாத்திய மான எல்லா விளைவுகளையும் எண் ணிக்கையிட முயலவும். நீங்கள் சிந்

தித்துச் செயல்படாதவராகவும் அவசரமாகச் செயல்படுபவராகவும் இருந்தால், மூன்று நிகழ்ச்சிகள் நடக்கக்கூடும் என்று அவசரமாகச் சொல்லிவிடுவீர்கள்:

B_1—இரண்டு ''தலை''கள் தோன்றுவது;

B_2—இரண்டு ''பூ''க்கள் தோன்றுவது;

B_3—ஒரு ''தலை''யும் ஒரு ''பூ''வும் தோன்றுவது.

அவ்வாறு எனில், நீங்கள் தவறு செய்பவர் ஆவீர்கள்! இந்த மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் தற்செயல் நேர்வுகள் அல்ல. B_3 நிகழ்ச்சி ஏனையவற்றில் ஒவ்வொன்றையும் விட இருமடங்கும் நிகழ்தகவு கொண்டதாகும். பரிசோதனையின் உண்மையான தற்செயல் நேர்வுகளை வரிசைப்படுத்தினால், அதை நாம் சரிபார்க்க முடியும்.

A_1—முதல் காசில் ''தலை''யும் இரண்டாவதில் ''தலை''யும்,

A_2—முதல் காசில் ''பூ''வும் இரண்டாவதில் ''பூ'' வும்;

A_3—முதல் காசில் ''தலை''யும் இரண்டாவதில் ''பூ''வும்;

A_4—முதல் காசில் ''பூ''வும் இரண்டாவதில் ''தலை''யும்.

நிகழ்ச்சிகள் B_1 மற்றும் B_2, A_1 மற்றும் A_2 நிகழ்ச்சிகளுடன் முற்றொருமையுள்ளவை ஆகும். ஆயினும், B_3 நிகழ்ச்சிக்கு A_3 மற்றும் A_4 என்னும் மாற்றுகள் இருக்கின்றன; இக்காரணத்தினால் எஞ்சியுள்ள நிகழ்ச்சிகளில் எது ஒன்றையும் விட இருமடங்கு நிகழ்தகவுடையதாய் அது இருக்கின்றது.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில், நாம் முதன்முதலாக, நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டில் பண்டைய முறை மாதிரியயை—தாழி மாதிடிரியைப்— பயன்படுத்துவோம். திட்டமாகச் சொல்லப் போனால், பல்வேறு நிறங்களையுடைய, குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை கொண்ட பந்துகள் உள்ள ஒரு கலம் ஆகும். அது பந்துகள் முற்றிலும் நன்றாகக் கலந்து கிடக்கும்படி செய்யப்பட்டுள்ளது; தொடுவதற்கு ஒரே மாதிரியான மேற்பரப்

பை உடையனவாய் அமைந்துள்ளன; இதன்விளைவாக, அவற்றுள் எதை வேண்டுமானாலும் வெளியே எடுப்பதற்குச் சம அளவு நிகழ்தகவு இருக்கும் வகை உறுதி செய்யப்படுகிறது. கீழே கருதப் பெறும் தாழிக் கணக்குகள் எல்லாவற்றிலும் இந்த நிபந்தனைகள் பின்பற்றப்படும்.

பண்டைய முறை மாதிரியினால் விளக்கப்படக் கூடிய பரிசோதனை கொண்ட, நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் ஒவ்வொரு கணக்கும், தாழி ஒன்றிலிருந்து பந்துகளை வெளியே எடுக்கும் கணக்கினால் குறிக்கப்பட முடியும். தாழிக் கணக்குகள், நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் பல்வேறு கணக்குகளையும் மொழிபெயர்க்கக் கூடிய ஒரு தனிப்பட்ட மொழியாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, மூன்று வெளுப்பு மற்றும் நான்கு கறுப்பு பந்துகள் உள்ள தாழி ஒன்று நம்மிடம் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். தொடர்பின்மை வகையிலே ஒரு பந்தை வெளியே எடுப்பது என்பதே பரிசோதனை.

இந்தக் கணக்கிற்குத் தீர்வு காணும் போது, நீங்கள் மீண்டும் ஒரு தவறு செய்து, இரண்டு நிகழ்ச்சிகளை அவசரமாகக் குறிப்பிடலாம் B_1—B_2 வெளுப்புப் பந்து ஒன்று வருவது; கறுப்புப் பந்து ஒன்று வருவது. அத்தகைய முறையில் நீங்கள் சிந்திப்பது என்றால், நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு உங்களுக்கு ஒத்து வராது. பெருபாலும் அத்தகையவிடையை நீங்கள் சொல்ல மாட்டீர்கள்; ஏன் எனில், மேற் குறிப்பிட்ட பரிசோதனையில் பந்துகளின் எண்ணிக்கை காரணமாக, இரண்டு அல்ல, ஏழு சாத்தியமான விளைவுகள் இருப்பதைப் புரிந்து கொண்டிருப்பீர்கள்: அவற்றை, எடுத்துக்காட்டாக, W_1, W_2, W_3, B_1, B_2, B_3, B_4 (அதாவது வெளுப்பு ஒன்று, வெளிப்பு இரண்டு, ——— கறுப்பு நான்கு) என்று குறிக்கலாம். இந்த விளைவுகள் ஒன்றனுக்கு ஒன்று விலக்கம் கொண்டனவாய், யாவும் அளாவினவாய் மற்றும் சம அளவில் நிகழ்க் கூடியனவாய் உள்ளன; அதாவது, இப்பரிசோதனை

யையும் பண்டைய முறை மாதிரியி னால் விவரிக்க முடியும்.

இங்கு ஒரு கேள்வி எழுகிறது. எந்தப் பரிசோதனை பண் டைய முறை மாதிரியினால் விவரிக்க முடியுமா? இல்லை, முடியாது. எடுத் துக்காட்டாக, சமநிலையில்லாத (வளைந்திருக்கும்) காசு ஒன்றைச் சுண்டி எறிந்தால், ''தலை''கள் தோன்றுவதையும் ''பூ''க்கள் தோன் றுவதையும் பண்டைய முறை மாதி ரியினால் விவரிக்க முடியாது; ஏன் எனில், அவை சம அளவில் சாத்தி யமான இரண்டு விளைவுகள் அல்ல (அவற்றுள் ஒன்று நிகழவே முடியாத வகையில் காசை வளைத்து விட நம் மால் முடியும்!) பரிசோதனையை, பண்டைய முறைமாதிரியினால் விவ ரிக்க வேண்டும் எனில், சாத்தியமான எல்லா விளைவுகளும் நிகழ்வதற்கான சம அளவு நிகழ்தகவை அளிக்கக்கூ டிய ஒரு சமச்சீர் அதற்கு இருக்க வேண்டும். சில சமயம் இந்த சமச் சீரை (காசு, பகடை, போன்ற), பரி சோதனையில் பயன்படுத்தப்படும்

பண்டங்களின் இயற்புச் சமச்சீரி னால் பெற முடியும்; சில சமயம், (பந்துகள் உள்ள தாழி, சீட்டுக்கட்டு, சீட்டுகள் உள்ள பரிசுச் சீட்டு உருளை போன்றவற்றில் இருப்பதைப் போல்), அவற்றுள் எதை ஒன்றினையாவது தேர்ந்தெடுப்பதற்கான சாத்தியக் கூறினைச் சம அளவில் அளிக்கும் வகையில் கலந்தோ பெற முடியும். பெரும்பாலும், சமச்சீரினை வழங்கு வதற்காகச் சிறப்பான அமைப்புக ளுக்கு ஏற்பாடு செய்யப் பெற்ற செயற்கையான பரிசோதனைகளி லேயே அத்தகைய சமச்சீர் பெறப் படுகின்றது. இதற்குச் சிறப்பான எடுத்துக்காட்டுகள் தற்செயல் நேர்வு விளையாட்டுகள் ஆகும் (எடுத்துக் காட்டுகள்: பகடை உருட்டுதல், சில சீட்டு விளைதாட்டுகள்). தற்செயல் நேர்வு விளையாட்டுகளின் ஆராய்ச் சியே, நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டின் அபிவிருத்திக்கான ஊக்கத்தை அளித் தது என்பதைக் குறிப்பிட வேண்டும்.

பண்டைய முறை மாதிரியினால் பரிசோதனை ஒன்றை விவரிக்க முடி

யுமானால், A என்னும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினை, A நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான தற்செயல் நேர்வுகளின் எண்ணிக்கைக்கும் மொத்த தற்செயல் நேர்வுகளின் எண்ணிக்கைக்குமுள்ள விகிதத்தின் மதிப்பாகக் கணக்கிட முடியும்:

$$P(A) = \frac{m_a}{n}$$

(இதில் n என்பது மொத்தத் தற்செயல் நேர்வுகளின் எண்ணிக்கையையும், m_a என்பதுA நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான (அதாவது, அது நிகழ்வதைக் குறிக்கும்) தற்செயல் நேர்வுகளையும் குறிக்கின்றன.

(1.2) சூத்திரம், **பண்டைய முறை சூத்திரம்** எனப்படுவது, தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகள் பற்றிய அறிவியல் துறை தொடங்கிய காலத்திலிருந்தே நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுவதற்காகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வந்துள்ளது. நெடுநாள் வரை, அது **நிகழ் தகவிற்கான வரையறுப்பு** என்றே கருதப்பட்டு வந்தது. சாத்தியமான விளைவுகளின்

சமச்சீர் இல்லாத பரிசோதனைகள், செயற்கை முறையில் பண்டைய முறை மாதிரியின் கீழ் ''கொண்டு வரப்பட்டனர்''. நமது காலத்தில் நிகழ்தகவின் வரையறுப்பு மற்றும் நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டை எடுத் துரைக்கும் முறை மாறியுள்ளன. (1.2) சூத்திரம் பொதுவானதன்று; ஆனால், அது சில எளிமையான கணக் குகளில் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு களை நாம் கணக்கிடுவதைச் சாத்திய மாக்குகிறது. பின்வரும் அத்தியாயங் களில், பண்டைய முறை மாதிரியி னால் பரிசோதனையை விவரிக்க முடி யாமற் போகும்போது, நிகழ்ச்சிக ளின் நிகழ்தகவுகளை எப்படிக் கணக் கிடுவது என்பதை நாம் கற்போம்.

(1.2) சூத்திரத்தைப்பயன்படுத்தி தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை நாம் கணக்கிடக்கூ டிய சில கணக்குகளை இப்போது எடுத்துக் கொள்ளலாம். அவற்றுள் சில நிரம்பவும் எளிமையானவை; ஆனால், பிற அவ்வாறு அல்லாதன.

கணக்கு 1.1. இரண்டு காசுகளை

சுண்டி எறிவது பரிசோதனை. குறைந்த பட்சம் ஒரு தடவையாவது ''தலை''கள் தோன்றுவதன் நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடவும்.

நீர்வு. குறைந்த பட்சம் ஒரு தடவையாவது ''தலை''கள் தோன்றுவதை A என்பதனால் குறிப்பிடவும். (பக்கம்... இல் கூறப்பட்டுள்ளது போல்), இப்பரிசோதனையின் நான்கு தற்செயல் நேர்வுகள் உள்ளன. மூன்று (A_1, A_2, மற்றும் A_3) A நிகழ்ச்சிக்குச் சாதனமாயுள்ளன. எனவே,

$$m_a = 3 \quad n = 4;$$

$$P(A) = {}^3/_4$$

கணக்கு 1.2. தாழியில் மூன்று வெளுப்புப்பந்துகளும் நான்கு கறுப்புப் பந்துகளும் இருக்கின்றன. தாழியிலிருந்து அவற்றுள் ஒன்று எடுக்கப்படுகிறது. பந்து வெளுப்பாயிருக்கும் நிகழ்ச்சி (A நிகழ்ச்சி) யின் நிகழ்தகவைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு. $n = 7$, $m_a = 3$, $P(A) = {}^3/_7$

கணக்கு 1.3. மூன்று வெளுப்பு, நான்கு கறுப்புப்பந்துகள் கொண்ட

அதே தாழி; ஆனால் பரிசோதனை நிலைகள் சற்று மாறியுள்ளன. ஒரு பந்தை எடுத்து, அதைப் பார்க்காமலேயே செருகு அறை ஒன்றில் அதை போட்டு விடுகின்றோம். அதன் பிறகு இரண்டாவது பந்தை எடுக்கின்றோம் இந்தப் பந்து வெளுப்பாதையிருக்கும் நிகழ்ச்சியின் (A நிகழ்ச்சியின்) நிகழ்தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு: நீங்கள் சற்று சிந்தித்தீர்களானால், தாழியிலிருந்து நிறம் தெரியாத பந்தை நாம் எடுத்துவிடுவது இரண்டாவது தேர்வாய்வு முயற்சியில் வெளுப்புப் பந்து தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவினை எவ்வகையிலும் பாதிப்பதில்லை என்பதை நீங்கள் காண்பீர்கள். (1.2) எடுத்துக்காட்டில் உள்ளது போலவே, அது ஆகவே இருக்கும்.

மேலாகப்பார்க்கும் போது, இரண்டாவது பந்தை நாம் எடுப்பதற்கு முன், ஏழிற்குப்பதிலான ஆறு பந்துகளே தாழியில் இருந்ததனால், நமது முடிவு சரியானதன்று என்று தோன்றலாம். இது, தற்செயல் நேர்

வுகளின் எண்ணிக்கை ஆறு என்பதைக் குறிப்பிடுகின்றதா?

இல்லை—முதல் பந்தின் நிறம் என்ன என்பது நமக்குத் தெரிந்தாலன்றி (இதற்காகத்தான் நாம் அதை செருகு அறையில் மறைத்து வைத்தோம்) தற்செயல் நேர்வுகளின் எண் எண்ணிக்கை ஏழாகவே இருக்கின்றது. இது சரியானதே என்று நாம் நம்மைத் திருப்தி செய்து கொள்வதற்கு, பரிசோதனையில் நிலைகளை இன்னும் தீவிரமாக நாம் மாற்றுவோம். இம்முறை, ஒன்றைத் தவிர மற்றெல்லாப் பந்துகளையும் எடுத்து அவற்றைப் பார்க்காமலேயே செருகு அறையினுள் வெப்போம். கடைசிப் பந்து வெளுப்பானது என்பதன் நிகழ்தகவு எவ்வளவாக இருக்கும்? தெளிவாக, $P(A) = {}^{3}/_{7}$ **ஏன்னெனில், பந்து வெளியே எடுக்கப்படாலும் சரி, தாழியிலேயே தனியே விட்டுவைக்கப்பட்டாலும்** சரி, அது சமமாகவே இருக்கின்றது.

செருகு அறையில் முன்னதாக வைக்கப்பட்ட, தெரியாத நிறங்களுள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கையைச்

சாராது, வெளுப்பு பந்து ஒன்று தோன்றுவதன் நிகழ்தகவு ஆகவே இருக்கும் என்பதைப்பற்றி உங்களுக்கு இன்னமும் சந்தேகமாயிருந்தால், பின்வரும் பரிசோதனை ஒன்றைக் கற்பனை செய்து கொள்ளவும். தாழியில் மூன்று வெளுப்பு, நான்கு கறுப்புப்பந்துகள் உள்ளன. அறை இருட்டாயிருக்கன்றது. தாழியிலிருந்து பந்துகளை எடுத்து, சாளர ஓரத்தின் மீது இரண்டு, அலமாரியின் மீது இரண்டு, மெத்தை நாற்காலியின் மீது ஒன்று என்று பரவலாக வைத்து விட்டு, எஞ்சியவை இரண்டையும் தரையின் மீது எரிந்து விடுவாக வைத்துக் கொள்ளவும் அதன் பின்னர், அறையில் அங்கும் இங்குமாக நடக்கத் தொடங்கி, ஒரு பந்தின் மீது கால் வைக்கிறோம். அந்தப் பந்து வெளுப்பாயிருக்கும் என்பதன் நிகழ்தகவு என்ன?

அது $^{3}/_{6}$ ஆக ஏன் உள்ளது என்பதை இன்னமும் நீங்கள் புரிந்து கொள்ள முடியவில்லை என்றால், எதுவும் உங்களுக்கு உதவ முடியாது;

நமது வாதங்கள் எல்லாம் தீர்ந்து போய் விட்டன.

கணக்கு 1.4. மூன்று வெளுப்பு, நான்கு கறுப்புப்பந்துகள் உள்ள அதே தாழி. ஒரே சமயத்தில் இரண் பந்துகளை வெளியே எடுத்தால், அவை இரண்டும் வெளுப்பாய் இருப் பதன் (A நிகழ்ச்சி) நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு: முந்தைய இரண்டு கணக் குகளை விட இது சற்று அதிகக் கடின மானது; இதில், தற்செயல் நேர்வு களின் எண்ணிக்கை n ஐயும், சாதக மான தற்செயல் நேர்வுகளின் எண் ணிக்கை m_a ஐயும் கணக்கிடுவது அதி கக் கடினமாயுள்ளது. இங்கு, தாழி லிருந்து இரண்டு பந்துகளைத் தெரிந் தெடுப்பதற்குள்ள சாத்தியமான வழிகளின் எண்ணிக்கையையும், வெளுப்புப் பந்துகளிலிருந்து இரண்டு பந்துகளைத் தெரிந்தெடுப்பதற் குள்ள வழிகளின் எண்ணிக்கையையும் நாம் காண வேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூறுகளிலி ருந்து சில கூறுகளைத் தெரிந்தெ டுத்து வரிசைப்படுத்துவதற்கான

சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையை தொடக்க நிலை இயற்கணிதத்தின் பகுதியான, வரிசைமாற்றங்கள் மற்றும் சேர்மானங்கள் பற்றிய கணிதவியல் பகுப்பாய்வுத்துறையைச் சேர்ந்த வழிமுறைகளினால் கணக்கிட முடியும். இங்க, அப்பகுப்பாய்வின் ஒரே ஒரு சூத்திரமே—அதாவது, சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கைக்கான C(k,s) எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிடும் ஒரு சூத்திரம் மட்டுமே நமக்குத் தேவைப்படும்—கூறுகளிலிருந்து ஒவ்வொரு சமயத்திலும் கூறுகளைத் தொகுக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை, k கூறுகளிலிருந்து வெவ்வேறு s கூறுகளைத் தெரிந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கையே ஆகும் (சேர்மான மாறுபடுவது கூறுகளின் சேர்க்கையில் மட்டுமே அன்றி அவற்றின் வரிசையில் அன்று என்பதை உங்களுக்கு நினைவுபடுத்துகிறோம். k கூறுகளிலிருந்து ஒவ்வொரு சமயத்திலும் s கூறுகளை எடுக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை

$$C(k,\ s) = \frac{k(k-1)\ \dots\ (k-s+1)}{1.2\ \dots\ s} \quad (1.3)$$

என்னும் சூத்திரத்தினால் கணக்கிட முடியும்; அதன் இயல்பு:

$$C(k,\ s) = C(k,\ k-s) \quad (1.4)$$

(1.3) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, நமது எடுத்துக்காட்டில் சாத்தியமான எல்லாத் தற்செயல் நேர்வுகளின் எண்ணிக்கை n ஐ (ஏழு பந்துகளிலிருந்து இரண்டைத் தெரிந்தெடுக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையை)க் கணக்கிடுவோம்:

$$n = C(7,2) = \frac{7.6}{1.2} = 21$$

இப்போது, சாதகமான தற்செயல் நேர்வுகளின் எண்ணிக்கையான m_a ஐக் கணக்கிடுவோம். தாழியில் உள்ள மூன்று வெளுப்புப் பந்துகளிலிருந்து இரண்டு பந்துகளைத் தெரிந்தெடுக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையாகும் இது. *(1.4)* மற்றும் *(1.3)* சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தினால், நமக்குக் கிடைப்பது

$m_a = C(3,2) = C(3,1) = 3$ இதிலிருந்து *(1.2)* சூத்திரத்தைக் கொண்டு

$$P(A) = \frac{C(3,1)}{C(7,2)} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

என்பதைப் பெறுகிறோம்.

கணக்கு 1.5. இன்னமும் *3* வெளுப்புகளும் கறுப்புப் பந்துகளும் அதே தாழி தான் (தயவு செய்து சற்றுப் பொறுமையாயிருங்கள் — விரைவிலேயே அது முடிந்து விடும்!). ஒரே சமயத்தில் மூன்று பந்துகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன: அவற்றுள் இரண்டு கறுப்பாகவும் ஒன்று வெளுப்பாகவும் இருக்கக் கூடியதன் (Aநிகழ்ச்சி) நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட பரிசோதனையில் தற்செயல் தேர்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடவும்:

$$n = C(7,3) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

சாதகமான தற்செயல் நேர்வுகளின் எண்ணிக்கை ஐக் கணக்கிடுவோம். நான்கு கறுப்புப் பந்துகளிலிருந்து இரண்டை எத்தனை வழிகளில் நாம் தெரிந்தெடுக்க முடியும்!

$$C(4,2) = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

வழிகளில். ஆனால், எல்லாம் இதுவே ஆகி விடாது. கறுப்புப் பந்துகளின் ஒவ்வொரு சேர்மானத்துடனும் வெளுப்புப் பந்துகளுள் ஒன்றைச் சேர்க்க முடியும்: எனவே, சாதகமான தற்செயல் நேர்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை

$$m_a = C(4,2) \cdot C(3,1) = 6 \cdot 3 = 18$$

இதிலிருந்து *(1.2)* சூத்திரத்தைக் கொண்டு நாம் பெறுவது,

$$P(A) = {}^{18}/_{35}$$

இப்போது, பின்வரும், பொதுக் கணக்கிற்குத் தீர்வு காண்பதற்குப் போதுமான திறனை நாம் பெற்றிருக்கின்றோம்.

கணக்கு. தாழி ஒன்றில் a வெளுப் பந்துகளும் b கறுப்புப்பந்துகளும் உள்ளன. தொடர்பின்மை வகையில் k பந்துகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன. அவற்றுள்ள l வெளுப்புப் பந்துகளும், எனவே, (k—l) கறுப்புப்

பந்துகளும் இருப்பதன் நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடிக்கவும்

$$l \leqslant a, \ k - l \leqslant b$$

தீர்வு: தற்செயல் நேர்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை

$$n = C(a + b, \ k)$$

சாதகமான தற்செயல் நேர்வுகளின் எண்ணிக்கை m_a ஐக் கணக்கிடவும். a பந்துகளிலிருந்து l வெளுப்புப்பந்துகளை நாம் தெரிந்தெடுக்கக் கூடிய l வழிகளின் எண்ணிக்கை C(a, l); (k — l) கறுப்புப் பந்துகளைச் சேர்ப்பதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை C(b, k — l) வெளுப்புப் பந்துகளின் ஒவ்வொரு சேர்மானத்தையும் கறுப்புப்பந்துகளின் ஒவ்வொரு சேர்மானத்துடன் சேர்க்க முடியும்; எனவே,

$$P(A) = \frac{C(a, \ l) \, C(b, \ k - l)}{C(a + b, \ k)}$$

(1.5) சூத்திரம் பல்வேறு துறைகளில், எடுத்துக்காட்டாக, தயாரிக்கப்பட்டபொருள்களின் தெரிந்தெ

டுக்கப்பெற்ற தரக்கட்டுப்பாடு பற்றிய கணக்குகளில், விரிவாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றனது. இங்கு, தயாரிக்கப்பட்ட பொருள்களின் வரிசைத் தொகுதி ஒன்று தாழியாகவும், குறைபாடில்லாத பொருள்களின் குறிப்பிட்ட ஒரு எண்ணிக்கையுள்ளவை வெளுப்புப் பந்துகளாகவும், குறைபாடுடன் கூடிய பொருள்களின் குறிப்பிட்ட ஒரு எண்ணிக்கையுள்ளவை கறுப்புப்பந்துகளாகவும் கருதப்படுகின்றது. பரிசோதனைக்காகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட k பொருள்கள், தாழியிலிருந்து வெளியே எடுக்கப்படும் பந்துகளின் பங்கை வகிக்கின்றன.

பொதுவியல் கணக்கிற்குத் தீர்வு கண்ட பின், இப்போது உங்களுக்கு ஆர்வமூட்டுவதாய் இருக்கக்கூடிய இன்னொரு கணக்கை எடுத்துக் கொள்வோம்.

கணக்கு 1.6. விளையாட்டுப் பரிசுப்போட்டியில் ஒருவர் ஒரு சீட்டை வாங்கி 49 எண்களில் 6–ஐக் குறித்திருக்கிறார். ஆறு வெற்றி எண்களுள்

அவர் மூன்று எண்களைச் சரியாக ஊகித்துள்ளார் என்பதற்கான நிகழ் தகவு என்ன!

தீர்வு: ஆறு எண்களுள் மூன்றைச் சரியாக ஊகித்திருக்கும் நிகழ்ச்சி Aஐ கவனியுங்கள் (மூன்று எண்கள் சரி யாக ஊகிக்கப்படவில்லை என்பது இதில் அடக்கம்).

ஒரு நிமிஷம்! இதுவே தான் நமது முந்தையக் கணக்கும்! உண்மையில் ஆறு வெற்றி எண்களையுடைய 49 எண்களையும், ஆறு வெளுப்பு, 43 கறுப்புப்பந்துகளுள்ள தாழிக்கு ஒப் பிடலாம். தொடர்பின்மை வகையில் ஆறுபந்துகளை எடுக்கும் போது 3 வெளுப்பாகவும் 3 கறுப்பாகவும் வரு வதன் நிகழ்தகவை நாம் கணக்கிட வேண்டும். அதை எப்படிச் செய்வது என்பது நமக்குத் தெரியும்! (1.5) சூத் திரத்தில், $a=6$, $b=43$, $k=6$, $l=3$, எனவே,

$$P(A)=\frac{C(6,3), C(43,3)}{C(49,6)}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot43\cdot42\cdot41\cdot4\cdot5}{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}$$

சக்தியிலிருந்து, முடிவைக் கணக்கி

டும் சிரமத்தை மேற் கொண்டால், உங்களுக்கு

$$P(A) \approx 0.0176$$

என்பது கிடைக்கும்.

ஆறு எண்களுள் மூன்றைச் சரியாக ஊகித்தீர்கள் என்பதற்கான நிகழ்தகவு நிரம்பவும் குறைவானதாயுள்ளது—ஏறத்தாழ 1.8% எனவே, நான்கு, ஐந்து, (ஓ, ஆச்சரியமான விஷயம்!) ஆறு எண்களைச் சரியாக ஊகிப்பதன் நிகழ்தகவு இன்னும் குறைவானதாயிருக்கும் என்பது வெளிப்படை. குறிப்பிடத்தக்க அளவிற்குக் குறைவானதாயிருக்கும் என்று நாம் சொல்ல முடியும். கணக்கிடுவதில் உங்களுக்கு ஆர்வம் இருந்தால், இந்த நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை நீங்கள் முயன்று கணக்கிடலாம். ஆக, இத்துறையில் ஓரளவு இப்போது நீங்கள் முன்னேறியிருக்கிறீர்கள்...

நிகழ் தகவு மற்றும் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு

அத்தியாயம் 1 இல், நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு, அதன் முக்கியமான கருத்துகள் (நிகழ்ச்சி மற்றும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு) ஆகியவை பற்றி உங்களுக்கு ஓரளவு சொல்லப்பட்டது; பண்டைய முறைச் சூத்திரம் எனச்சொல்லப்படும்

$$P(A) = \frac{m_a}{n} \tag{2.1}$$

(n என்பது தற்செயல் நேர்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையினையும், m_a என்பது A நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான தற்செயல் நேர்வுகளின் எண்ணிக்கையினையும் குறிக்கின்றது.) என்பதனைக் கொண்டு நிகழ்ச்சிகளின்

நிகழ் தகவுகளைக் கணக்கிடுவதை யும் நீங்கள் கற்றுக்கொண்டீர்கள்.

ஆயினும், நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டைச் செயலளவில் உங்களால் பயன்படுத்த முடிகின்றது என்று இதற்குப்பொருள் இல்லை. துரதிர்ஷ்டவசமாக, (2.1) சூத்திரமானது நாம் விரும்பும் அளவிற்குப் பொதுத் தன்மையுடையதன்று. சாத்தியமான விளைவுகளின் சமச்சீர் உள்ள (அதாவது, பண்டைய முறை மாதிரியினால் விவரிக்கப்படக் கூடிய) பரிசோதனைகளில் மட்டுமே நாம் அவற்றைப் பயன்படுத்த முடியும். இப்பரிசோதனைகள், முக்கியமாக சிறப்பு முறைகளினால் உறுதி செய்யப்பெற்ற சமச்சீர் உள்ள தற்செயல் நேர்வு விளையாட்டுகள் தாம். நம் காலத்தில் சூதாடுவது என்பது ஒரு விரிவான தொழிலாக இல்லை, (கடந்தக் காலத்தில் நிலைமை வேறு வகையினதாய் இருந்தது); ஆதலால், (2.1) சூத்திரத்தின் செயல் முக்கியத்துவம் நிரம்பவும் வரம்புக்குட்பட்டதாகவே உள்ளது. நாம் செயலளவில் கவனிக்

கும், தொடர்பின்மை வகை விளைவுகள் உள்ள பெரும்பாலான பரிசோதனைகள், பண்டைய முறை மாதிரியினால் விளக்கக் கூடியனவல்ல. நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைப் பற்றி நாம் என்ன சொல்ல முடியும்? அத்தகைய பரிசோதனைகளுக்காக அவை உள்ளனவா? உள்ளன என்றால் அவற்றை **நாம்** எங்ஙனம் கண்டு பிடிக்கின்றோம்?

இப்போது நாம் கருதப்போவது அப்பிரச்னையே. இங்கு, நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் ஒரு புதிய கருத்தை—**ஒரு நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு**—என்பதனை அறிமுகப்படுத்த வேண்டும்.

அதை, சற்றுத் தொலையிலிருந்து, நாம் அணுகுவோம். பண்டைய முறை மாதிரியினால் விளக்கப்பட முடியாத பரிசோதனை ஒன்றைக் கற்பனை செய்து கொள்ளவும்; எடுத்துக்காட்டாக, ஒழுங்கற்ற, சமச்சீர் இல்லாத பகடை ஒன்றை உருட்டுவது (குறிப்பிட்டதொரு முகம் தோன்றும் நிகழ்தகவினை அதிகரிக்கச் செய்யும் வகை

யில், ஈயத் தினாலான பளு ஒன்றின் துணை கொண்டு பகடையின் (நிறை மையத்தை இடம் பெயரச் செய்வதனால் இந்தச் சமச்சீரின்மையை உண்டாக்க முடியும்). இத்தகைய சந்திரம் தொழில் முறைச் சூதாட்டக்காரர்களினால் அவர்கள் காலத்தில் லாபமடையும் நோக்கத்துடன் கையாளப்பட்டு வந்தது. (நிற்க, இது ஆபத்து நிறைந்தது; ஏன் எனில், சூதாட்டக்காரன் ஒருவன் கையும் களவுமாகப் பிடிக்கப்பட்டு விட்டால் பொதுவாக, அவனை நிறை, சில சமயம் சாகும் வரை கூட, புடைத்து விடுவதுண்டு.) இப்பரிசோதனையில் A நிகழ்ச்சி ஒன்றை—ஆறுபுள்ளிகள் தோன்றுவது என்பதனை—கருதவும். இப்பரிசோதனையைப் பண்டைய முறை மாதிரியினால் விளக்க முடியாததாகையால, (2.1) சூத்திரம் இங்கே நமக்குப்பயன்படாது; $P(A) = 1/6$ என்பதாக, நாம் கொள்ள முடியாது. அவ்வாறு எனின், A நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ன? $1/6$ ஐ விட மிகுதியானதா, குறைவானதா? அதை, தோராயண

மாகவேனும் நிர்ணயிப்பது எப்படி? சாமானிய அறிவுள்ள எவனாலும் இக்கேள்விக்கு எளிதில் விடை கூற முடியும். ''பகடையில் பல முறை முயன்று உருட்ட வேண்டும்; எவ்வளவு அடிக்கடி (முயற்சிகளின் விகித சம அளவாக) A நிகழ்ச்சி நிகழ்கின்றது என்பதைப் பார்க்க வேண்டும்'' என்று சொல்லுவான். நிகழ்ச்சி ஏற்படும் நிகழ்ச்சிகளின் பின்னத்தின் மதிப்பை (அதாவது, அது நிகழும் சதவீதத்தினை) அதன் நிகழ்தகவாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

''சாமானிய அறிவு'' உடைய இந்த ஆள் கூறுவது முற்றிலும் சரியே. தன்னை அறியாமலேயே, அவன் ஒரு நிகழ்ச்சியின் ''அடுக்கு நிகழ்வு விரை'' என்னும் கருத்தை பயன்படுத்தியிருக்கிறான். இப்போது, அச்சொல்லின் திட்டமான வரையறுப்பு என்பதைத் தருவோம்.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் மறு நிகழ்வுகளின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு என்பது இந்நிகழ்ச்சி நிக்ழ்ந்த மறுநிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கைக்கும், மறு நிக்ழ்வுகளின் மொத்த

எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதம் ஆகும்.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு சில சமயம் **புள்ளியியல் நிகழ்தகவு** என்று அழைக்கப் பெறுகின்றது. சாத்தியமான விளைவுகளைப் பொறுத்து, சமச்சீர், இல்லாத பரிசோதனைகளில் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவினைத் தீர்மானிப்பதற்கு அடிப்படையாக விளங்குவது, பெரும் அளவிலுள்ள தொடர்பின்மை முறை நிகழ்ச்சிகளின் புள்ளியியலே ஆகும்.

A நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவை P*(A) என்பதனால் குறிப்பிடுவோம். (* நட்சத்திரக்குறி, அதனுடன் சம்பந்தப்பட்ட P(A) நிகழ்தகவினின்றும் அடுக்கு நிகழ் விரைவைப் பிரித்துக் காட்டுவதற்காகப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.)

வரையறுப்பின் படி,

$$P^*(A) = \frac{M_A}{N} \qquad (2.2)$$

இங்கு, N என்பது, பரிசோதனையின் மொத்த மறு நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கையையும் M_A என்பது A நிகழ்ச்சி நிகழும் மறு நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்

கையையும் (அதாவது, A நிகழ்ச்சி நிகழும் எண்ணிக்கையையும்) குறிக்கின்றன.

அமைப்பில் ஒன்று போலத் தோன்றினாலும், (2.1) மற்றும் (2.2) சூத்திரங்கள் அடிப்படையிலே வெவ்வேறானவை ஆகும். சூத்திரம் (2.1), பரிசோதனையின் குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளுக்கேற்ப ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவின் **கோட்பாட்டுவகைக் கணக்கீட்டில்** பயன்படுத்தப்படுகின்றது, சூத்திரம் (2.2) ஒரு நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவின் **பரிசோதனை வாயிலான கணக்கீட்டில்** உபயோகிக்கப்படுகின்றது; அதைப் பயன்படுத்துவதற்கு, பரிசோதனையில் புள்ளியியல் விவரங்கள் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன.

அடுக்குநிகழ்வு விரைவின் இயல்பு பற்றி நாம் கவனிப்போம். ஒரு நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்கும் அதன் நிகழ்தகவிற்குமிடையே குறிப்பிட்டதொரு தொடர்பு உள்ளது என்பது தெளிவு: உண்மையில், அதிக அளவிற்கு நிகழ்தகவுடைய நிகழ்ச்சி

கள் குறைந்த அளவு நிகழ்தகவுடைய நிகழ்ச்சிகளை விட அடிக்கடி நிகழ்கின்றன. எனினும், ஒரு நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு மற்றும் நிகழ்தகவு விரைவு மற்றும் நிகழ்தகவு என்னும் கருத்துகள் முற்றொருமையானவை அல்ல. பரிசோதனையின் மறு நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாயிருக்க இருக்க, நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுக்கும் அதன் நிகழ்தகவுக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பு அதிக அளவிற்குக் குறிப்பிடத்தக்கதாய் அமைந்துள்ளது. மறு நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை குறைவானதாயிருந்தால், நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு பெருமளவிற்குத் தொடர்பின்மை வகை அளவுருவாய் இருக்கின்றது; இது நிகழ்தகவினின்றும் அடிப்படையில் மாறுபட்டதாயிருக்க முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு காசைப் பத்துத் தடவை சுண்டி எறிகிறோம்; மூன்று தடவை ''தலை'' தோன்றின என்று வைத்துக்கொள்வோம். இந்நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு

நிகழ்வு விரைவு 0.3; இம்மதிப்பு அதன் நிகழ்தகவான 0.5 இலிருந்து பெரிதும் வேறுபடுவதாயுள்ளது. ஆயினும், மறு நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக ஆக, நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு தனது தொடர்பின்மை வகை இயல்பைப்படிப்படியாக இழந்து விடுகிறது. மறு நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை பெரிதாய் இருக்கும்போது, ஒவ்வொரு மறு நிகழ்வின் நிபந்தனைகளில் உண்டாகும் தொடர்பின்மை வகை மாறுதல்கள் ஒன்றை ஒன்று ஈடு செய்து கொண்டு விடுகின்றன; அடுக்கு நிகழ் விரைவு சமநிலையை அடைய முற்பட்டு, சிறு மாறுதல்களுடன், குறிப்பிட்ட தொரு நிலையான எண்ணிக்கையை ஒநருங்குகின்றது. இந்த நிலை எண்ணே நிகழ்ச்சியின் திட்டமான **நிகழ்தகவு** ஆகும் என்று கருதுவது இயல்பே.

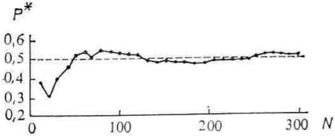
(2.1) சூத்திரத்தினால் கணக்கிடக்கூடிய நிகழ்தகவுகளை உடைய நிகழ்ச்சிகளில் தான், அதாவது பண்டைய முறை மாதிரியினால் விவரிக்

கப்படக் கூடிய பரிசோதனைகளில் தான் இக்கூற்றினைச் சரிபார்க்க முடியும். அவற்றைப் பொறுத்தவரை அது உண்மையாக இருப்பது தெரிகிறது.

உங்களுக்கு அக்கறை இருந்தால், ஏதாவதொரு எலிமையான பரிசோதனையில் நீங்களே அதன் உண்மையைச் சரிபார்க்க முடியும். எடுத்துக் காட்டாக, காசு ஒன்றைச் சுண்டி எறியும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது, ''தலை'' தோன்றுவதன் அடுக்கு நிகழ்வின் விரைவு, இந் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவான 0.5ஐ நெருங்குவதை நீங்களே பார்க்கலாம். காசை 10, 20... தடவைகள் (நீங்கள் பொறுமை இழக்கும் வரை) சுண்டி எறியவும்; சுண்டி எறியும் தடவைகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து; ''தலை'' தோன்றுவதன் அடுக்குநிகழ்வு விரைவைக் கணக்கிடவும். காலதாமதத்தையோ, அதிக முயற்சியையோ தவிற்ப்பதற்கு, ஒரு காசை அன்று, பத்துக்காசுகளை ஒரே சமயத்தில் சுண்டி எறியவும் (முன்னதாக

அவற்றை நன்கு கலந்து விட வேண்டியது அவசியம்). பின்னர், கிடைத்த எண்ணிக்கைகளுக்கேற்பக் குறி வரை என்றும் வரை கோடு ஒன்றினைப் புள்ளியிட்டு வரையவும். மற்றும் கலக்கப்பட்ட 10 ஒரு கோபெக் நாணயங்களை முப்பது தடவைச் சுண்டியதன் விளைவாகக் கிடைத்த விவரங்களின் படி வரையப்பெற்ற, படம் 1—இல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளதைப் போன்ற வகையினாலான வளைகோடு ஒன்று கிடைக்கும். ஒருக்கால், நீங்கள் அதிகப் பொறுமையுடன் இன்னும் மிகுதியான எண்ணிக்கையுள்ள வகையில் நாணயங்களைச் சுண்டியெறியக்கூடும். தொடர்பின்மை நிகழ்ச்சிகளின் தன்மையினை ஆராயும், புகழ்வாய்ந்த அறிவியலறிஞர்கள் கூட அத்தகைய பரிசோதனைகளைப் புறக்கணிக்கவில்லை என்பது ஆர்வமூட்டுவதாய் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, பிரசித்தி பெற்ற புள்ளியியல் அறிஞரான கார்ல் பியர்ஸன் என்பவர் ஒரு நாணயத்தை 24, 000 தடவை சுண்டி, அவற்றுள் 12,

012 தடவை "தலை" விழுவதை அறிந்தார்; அதாவது, அப்பரிசோத னையின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவின் மதிப்பு கிட்டத்தட்ட 0.5 ஆக இருந் தது. அங்ஙனமே, பகடைக்காய் ஒன்றை உருட்டும் பரிசோதனையும் பல தடவை நிகழ்த்தப்பட்டு, வெவ் வேறு முகங்கல் தோன்றுவதன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவும் $^1/_6$ க்கு நெருங்கியி ருந்ததும் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது இவ்வாறாக, அடுக்குநிகழ்வு விரைவு களின் மதிப்புகள் முறையே நிகழ்த கவுகளை நெருங்கியிருக்கும் விவரம் பரிசோதனை வாயிலாகச் சரி பார்க் கப்பட்டு விட்டதாகக் கருத முடியும்.



ஒரு பரிசோதனையை மிகப்பல தடவை மீண்டும் மீண்டும் நிகழ்த்தும் போது, **அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுநிலைப் படுதல்** என்பது பெருமளவுத்

தொர்பின்மைத் தோற்றங்களில் காணப்படும், அவற்றுக்கே உரிய இயல்புகளில் ஒன்றாக அமைந்திருப்பது தென்படுகிறது. ஒரே பரிசோதனையை நாம் மீண்டும் மீண்டும் நிகழ்த்தினால் (ஆனால், தனிப்பட்ட தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் விளைவுகள் பரஸ்பரம் சார்பில்லாதனவாய் இருக்க வேண்டும்), அந்நிகழ்ச்சியின் அடுக்குநிகழ்வு விரைவின் தொடர்பின்மை குறைந்து கொண்டே வருகின்றது; அது மேன்மேலும் சமமாகி, நிலை மதிப்பை நெருங்குகின்றது. பண்டைய முறை மாதிரியினால் விவரிக்கப்படும் பரிசோதனைகளில், இந்த நிலை எண் **நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு** ஆகவே அமைகிறது என நேரடியாகவே உறுதி செய்து கொள்ள முடியும். பண்டைய முறை மாதிரியினால் பரிசோதனை விவரிக்கப்பட முடியாதிருந்து, ஆனால், அடுக்கு நிகழ்வு விரை நிலைத்தன்மையினை வெளிப்படுத்தி, ஒரு நிலை மதிப்பை அடைய முற்படும் போது நிலைமை என்ன? இவ்வித செயல்படுகிறது என

வைத்துக்கொண்டு, இந்த நிலை எண்ணை அந்நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுக்குச் சமமாக நாம் இனம் காணுவோம், ஆக, பண்டைய முறை மாதிரியினால் விவரிக்கப்படக் கூடிய நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் பரிசோதனைகள் ஆகியவற்றுக்கு மட்டுமன்றி, அதன் கீழ்க் கொண்டுவரப்பட முடியாத, ஆனால், அடுக்கு நிகழ்வுவிரைவு நிலைப்படுதல் இயல்பினைக் கொண்டவற்றிற்கும் கூட அடுக்கு நிகழ் விரைவு என்னும் கருத்தினைப் பயன் படுத்த முற்பட்டுள்ளோம்.

அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுகளின் நிலைப்படுதலைப் பற்றி நமக்கு என்ன தெரியும் தொடர்பின்மை வகைத் தோற்றங்கள் எல்லாவற்றிற்குமே இந்தச் சிறப்பியல்பு உள்ளதா! எல்லாவற்றிற்கும் என்று சொல்ல முடியாது; எனினும், பலவற்றிற்கு உள்ளது. பின்வரும் தர்க்க முறையினால் சிக்கலான இந்தக் கருத்தை நாம் விளக்குவோம். அதைச் சரியாகப் புரிந்து கொள்ள முயலவும்; நிகழ் தகவு வழி முறைகளைப் பயன்படுத்

தும்போது நிகழக்கூடிய தவறுகளை நீங்கள் தவிர்க்கலாம்.

அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுகளைப் பற்றிக் குறிப்பிடுகையில், (நாணயத்தைச் சுண்டி எறிதல், பகடைக் காயை உருட்டுதல் முதலியவை போன்ற) ஒரே பரிசோதனையை நாம் மீண்டும் மீண்டும் வரம்பற்ற தடவைகள் நிகழ்த்த முடியும் எனக் கருதினோம். உண்மையில், (நமக்கு நேரம் மட்டும் இருந்தால்) அத்தகைய பரிசோதனை ஒன்றை எவ்வளவு பெரும். எண்ணிக்கையுள்ள முறைகள் வேண்டுமானாலும் நாம் செய்வதை எதுவும் தடுப்பதற்கில்லை. ஆனால், நாமே பரிசோதனையைச் செய்யாமல், இயற்கை நிகழ்த்தும் ''பரிசோதனைகளின்'' விளைவுகளை நாம் கவனிப்பதை மட்டுமே செய்யும் எடுத்துக் காட்டுகள் உள்ளன. அத்தகைய நிலையில், அடுக்கு நிகழ்வு விரைவின், நிலைப்படுதலை நாம் முன்னதாகவே உறுதியாகக் கூற முடியாது; ஒவ்வொரு தடவையும் அது உண்மை என்பதை

நாம் நேரடியாக உணர்ந்தறிய வேண் டியிருக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டாக, அத்தகைய ''பரிசோதனை'' குழந்தை ஒன்று பிறப்பது என்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்; ஆண் குழந்தை பிறப் பதன் நிகழ்தகவினை அறிய விரும் புகின்றோம் (இவ்வகைப் ''பரிசோ தனைகள்'' இயற்கையினால் அண் டுதோறும் மாபெரும் எண்ணிக்கை அளவில் நிகழ்த்தப்படுகின்றது). இத் தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளில் அடுக்குநிகழ்வு விரைவு நிலைப்படு தல் இருக்கின்றதா? ஆம், இருக்கின் றது. ஆண் மகவு ஒன்று பிறப்பதன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு பெரிதும் நிலையாக உள்ளது என்றும், நாடு அமைந்திருக்கும் புவியியல் பகுதி, பெற்றோர்களின் நாடு, அவர்களின் வயது முதலியவற்றின் மீது அது பெரும்பாலும் சார்ந்திருக்கவில்லை என்றும் புள்ளியியல் நோக்கில் உறு திப்படுத்துப்பட்டுள்ளது. இந்த அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு 0.5ஐ விடச் சற்சே அதிகமாயுள்ளது. (தோரய

மாக 0.51) சில சிறப்பு நிலைகளில் (எடுத்துக் காட்டாக, போரின் போதோ அல்லது அதன் பிறகோ), பல ஆண்டுகளாக இருந்து வந்த சராசரி நிலையான மதிப்பினின்றும் அது விலகக்கூடும்; ஆனால், இதற்கான காரணங்கள் இது வரை அறியப் பெறவில்லை. ஆனால் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவின் நிலைப்படுதல் என்று பண்பு (சற்றுக் குறுகிய கால அளவுகளில் மட்டுமாவது), தொழில் நுட்பச் சாதனங்கள் இயங்காமற் போதல், உற்பத்தியில் தரக்குறைவினால் ஒதுக்கித்தள்ளப்படும் பண்டங்கள், எந்திர அமைப்புகளில் ஏற்படும் தவறுகள், குறிப்பிட்ட தொகு பகுதியிலுள்ள மக்கள் தொகையின் நோய் மற்றும் இறப்பு ஆகியவற்றின் அளவு மற்றும் வானிலையியல் மற்றும் உயிரியல் தோற்றங்கள் போன்ற தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளில் இயல்பாக அமைந்துள்ளது. அத்தகைய தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளைக் கட்டுப்படுத்தவும் முன்னறிவிக்கவும் அவற்றைப் பயிலுவதில்

நிகழ்தகவு வழிமுறைகளை வெற்றியுடன் நாம் பயன்படுத்துவதை இந்த நிலைப்படுதல் என்பது சாத்தியமாக்குகின்றது.

ஆனால், அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு நிலைப்படுதல் என்பது இருப்பதாக வைத்துக்கொண்டாலும், அது ஐயப்படுள்ளதாக இருக்கும் தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளும் உள்ளன. இத்தகை நிகழ்ச்சிகளில், பரிசோதனையை ஏராளமான தடவை மீண்டும் மீண்டும் நிகழ்த்துவது என்பதைக் குறிப்பிடுவது பொருளற்றதாகும்; அவற்றைப் பொறுத்தவரை போதுமான அளவிற்குப் புள்ளியியல் விவரங்கள் கிடையாது (அல்லது, கருத்தளவில் அவற்றைப் பேறுவதும் முடியாது). அத்தகைய நிகழ்ச்சிகளில் ஏறத்தாழ நிகழ்தகவுடையனவாகத் தோன்றுபவை சிலவும் உண்டு; ஆனால், அவற்றிற்கு நிச்சயமான நிகழ்தகவுகளைக் குறிப்பிட இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, மூன்று ஆண்டுகளில் மகளிர் நீண்ட சுற்றாடைகளை அணிவர் (அல்லது, ஆண்

கள் நீண்ட மீசைகளைப் புதிய மோஸ்தராகக் கருதுவர்) என்னும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுவது ஏறக்குறையச் சாத்தியமில்லை(அது அறிவிற்கொவ்வாதது கூ!). அதற்குத் தேவையான அல்லது பொருத்தமான புள்ளியில் விவரங்கள் அடங்கிய கோப்பு இல்லை; பின்வரும் ஆண்டுகளைப் ''பரிசோதனைகளாக''க் கருதுவோமானால், அவை ஒரே மாதிரியானவை என எந்தக் கருத்திலும் கொள்ள முடியாது.

நிகழ்ச்சி ஒன்றின் நிகழ்தகவினைப் பற்றிக் குறிப்பிடுவது மேலும் பொருளற்றதாக இருக்கும் இன்னோர் எடுத்துக்காட்டு இதோ. செவ்வாய்க் கோளிம் மீது உயிர்ப்பொருள் உள்ளது என்பதன் நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுவதற்கு நாம் தீர்மானிப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். அது அங்கு உள்ளதா இல்லையா என்னும் வினாவிற்கு அண்மை எதிர்காலத்திலேயே விடை கண்டு பிடிக்கப்பட்டு விடும். உயிர்ப்பொருள் செவ்வாயின் மீது இருக்கக் கூடும்

என்றே பல அறிவியலறிஞர்கள் எண்ணுகின்றனர். ஆனால், ''இருக்கக் கூடிய அளவு'' என்பது இன்னமும் நிகழ்தகவு ஆக இல்லை! அனுபவ நோக்கில் நிகழ்தகவினை மதிப்பிட முயலும்போது நாம் தெளிவற்ற தோர் ஊக நிலையிலேயே இருக்க வேண்டியவர்களாயுள்ளோம். பிரத்தியட்சமான நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிட வேண்டுமானால், நமது கணக்கீடுகள் போதிய அளவிற்கு விரிவான அளவில் எடுக்கப்பெற்ற புள்ளியியல் விவரங்களை ஆதாரமாகக் கொண்டிருக்க வேண்டும். இந்தக் குறிப்பிட்ட எடுத்துக் காட்டில், விரிவான புள்ளியல் விவரங்களைப்பற்றி நாம் பேச முடியுமா? முடியாது. ஒரே ஒரு செவ்வாய்க் கோள் தான் இருக்கின்றது!

எனவே, நாம் நமது நிலையினைத் தெளிவாகச் சொல்லுவோம்! பண்டைய முறை மாதிரியினால் விவரிக்கப்பட முடியாத இபரிசோதனைகளின் நிகழ்ச்சிகள், அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு நிலைப்படுதல் என்னும் பண்

பினையுடைய தொடர்பின்மை வகைப் பெருமளவு நிகழ்ச்சிகள் வகையினைச் சேர்ந்தனைவாயிருந் தால் தான் அந்நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ் தகவுகளைப் பற்றி நாம் பேசுவோம். குறிப்பிட்ட தொரு பரிசோதனை இப்பண்பினைப் பெற்றுள்ளதா, இல் லையா என்னும் வினாவிற்குப் பொதுவாக சாமானிய அறிவுநோக் கிலிருந்தே விடை காணப்படுகிறது. பரிசோதனையினை அதன் நிபந்த னைகளை அடிப்படையில் மாற்றா மல் மீண்டும் மீண்டும் நிகழ்த்த முடி யுமா? பொருத்தமான புள்ளியியல் விவரங்களை நாம் திரட்டுவதற்கான வாய்ப்பு உள்ளதா? குறிப்பிட்ட தொரு துறையில் நிகழ்தகவு வழிமு றைகளைப் பயன்படுத்தப்போகும் ஆராய்ச்சியாளனால் தான் இக்கேள் விகளுக்கு விடையளிக்கப் பெற வேண்டும்.

மேலே கூறப்பெற்றுள்ளதனுடன் நேரடியாகத் தொடர்புள்ள இன் னொரு கேள்வியைப் பற்றி நாம் கரு தலாம். ஏதாவதொரு பரிசோதனை

யில் நிகழ்ச்சி ஒன்றி நிகழ்தகவினைப் பற்றிப் பேசுகையில், அப்பரிசோதனையின் அடிப்படை நிபந்தனைகளை நாம் முதன்முதலில் குறிப்பிட வேண்டும்; இந்நிபந்தனைகள், பரிசோதனையை மீண்டும் மீண்டும் நிகழ்த்தும் போதெல்லாம், நிலையாகவும் மாறாமலும் இருப்பதாக வைத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டினை நடைமுறையில் பயன்படுத்துவதில் அடிக்கடி நிகழும் தவறுகளுள் ஒன்று (முக்கியமாகத் தொடக்க நிலையில் இருப்பவர்களைப் பொறுத்தவரை) என்னவெனில், கருதப்படும் பரிசோதனைக்கான நிபந்தனைகளைக் குறிப்பிடாமலும் இந்த நிகழ்தகவு அடுக்குநிகழ்வு விரைவு உருவில் வெளியாகக் கூடிய, தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளின் ''புள்ளியியல் விவரங்களின் கோப்பு'' இல்லாமலும், ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினைப்பற்றிப் பேசுவதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ரயில் வண்டித் தொடர் ஒன்று தாமதமாக வருதல் என்பதைப் போன்ற ஒரு நிகழ்ச்

சியின் நிகழ்தகவினைப்பற்றிப் பேசுவது பொருளற்றதாகும். உடனே பல கேள்விகள் எழுகின்றன: எந்த ரயில் வண்டித் தொடர் குறிப்பிடப்படுகிறது! அது எங்கிருந்து வருகிறது, அதன் பயண முடிவு ஏது? அது சரக்கு ரயில்வண்டித் தொடரா அல்லது பயணிகள் ரயில் வண்டித் தொடரா? எந்த இருப்புப்பாதையைச் சேர்ந்தது அது? இவ்விவரங்கள் பற்றி எல்லாவிளக்கங்களையும் பெற்ற பிறகே, இந்நிழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு நிச்சயமான மதிப்புடைய ஒன்று என்று நாம் கருத முடியும். ''நாணயங்கள்'', ''பகடை'', ''விளையாட்டுச் சீட்டுகள்'' பற்றிய வேடிக்கைப் பிரச்னைகளில் அக்கறை கொண்டுள்ளோர் மட்டுமின்றி, உண்மையான குறிக்கோள்களை அடையும் பொருட்டு நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் வழிமுறைகளைச் செயல் முறையில் பயன்படுத்த விரும்புவோரும் எதிர்கொள்ள வேண்டியிருக்கும் எதிர்பாராத கடலினுள் மூழ்கியிருக்கும் பாறைகளைப் போன்ற, அடியில்

மறைந்து கிடக்கும் தடைகளைப் பற்றி அவர்களுக்கு எச்சரிக்கை செய்ய வேண்டியுள்ளது.

இப்போது, இந்த நிபந்தனைகள் யாவும் நிறைவேற்றப்பட்டு விடுவ தாக வைத்துக் கொள்வோம்; அதா வது, ஒரே மாதிரியாக, நிகழ்ச்சியி னைப் பல தடவை நாம் நிகழ்த்த முடியும் என்னும், அந்நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு நிலையான தாக இருக்கிறது என்றும் வைத்துக் கொள்வோம். அப்போது, தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் குறிப்பிட்ட தொடரில் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ் விரைவினை, இந்நிகழ்ச்சியின் தோராயமான நிகழ்தகவினைக் கணக் கிடுவதற்கு நாம் பயன்படுத்த முடி யும். பரிசோதனையின் தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ் விரைவு அதன் நிகழ்தகவினை நெருங்குகிறது என்பதை நாம் ஏற்கன வேயே ஏற்றுக்கொண்டுள்ளோம் இதில் பிரச்னை எதுவும் இல்லை போலத் தோன்றுகிறது; ஆனால்,

அது அத்தனை எளிமையானதன்று. அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுக்கும் நிகழ் தகவினுக்குமிடையே உள்ள தொடர்பு சற்றுச் சிக்கலானதாகவே அமைந்துள்ளது.

மேலே நாம் பயன்படுத்தியுள்ள ''நெருங்குகிறது'' என்னும் சொல்லைப் பற்றிச் சற்றுச் சிந்தியுங்கள். அது எதைக் குறிக்கின்றது?

''இது என்ன விசித்திரமான கேள்வி'' என்று நீங்கள் நினைக்கலாம். ''நெருங்குகிறது'' என்றால், மேலும் மேலும் அருகாமையில் வருகிறது என்று தானே பொருள். எனவே, இதில் நாம் அதைப்பற்றிச் சிந்திப்பதற்கு என்ன இருக்கிறது?''

எனினும், சிந்திக்க வேண்டியது சிறிது உள்ளது. தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிகளைப் பற்றி நாம் கவனித்து வருகிறோம்; இந்நிகழ்ச்சிகளைப் பொறுத்த வரையில் எதுவுமே தனித்தன்மையுடன் கூடியது, ''கிறுக்குத் தனமானது'' தான்,

n இன் மதிப்பு அதிகரித்து வரும்

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

என்னும் பெருக்கல் விருத்தித் தொடரின் மொத்தம் முடிவின்றி 2—ஐ நெருங்குகிறது (2 இன் அருகில் செல்ல முற்படுகிறது) என்று நாம் சொல்லும் போது, அதிகமான எண் பகுதிகளை எடுத்துக் கொள்ள எடுத்துக்கொள்ள மொத்தமானது அதன் வரம்பு மதிப்பிற்கு அதிக அளவிற்கு நெருக்கமாயுள்ளது; மேலும், இது முற்றிலும் உண்மை. தொடர்பின்மை வகைத் தோற்றங்கள் பற்றிய துறையில், அத்தகைய தீர்மானமான முடிவுகளைச் சொல்ல முடியாது. உண்மையில், பொதுவாகச் சொன்னால், நிகழ்ச்சி ஒன்றின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அதன் நிகழ்தகவினை நெருங்க முற்படுகின்றது; ஆனால், தன் போக்கிலேயே தான்: நிச்சயமாக அல்ல, **கிட்டத்தட்ட நிச்சயமாகத்** தான், நிரம்பவும் அதிக அளவு நிகழ்தகவுடன். ஆயினும், ஏராளமான எண்ணிக்கை அளவிற்குச் செய்யப்படும் தேர்வாய்வு முயற்சிகளில் கூட

நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அதன் நிகழ்தகவிலிருந்து மிகப்பெரு மளவிற்கு வேறுபட்டிருக்க முடியும். எனினும், இது நிகழ்வதற்கான நிகழ்த கவு மிகவும் குறைவு; தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க அந்தக் குறைவு மேன்மே லும் அதிகமாயிருக்கும்.

நாணயம் ஒன்றை N=100 தட வைகள் நாம் சுண்டி எறிந்திருப்பதாக வைத்துக் கொள்ளலாம். ''தலை'' கள் தோன்றுவதன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அதன் நிகழ் தகவான P(A)=0.5 என்பதிலிருந்து பெரிதும் வேறுபட்டிருக்க முடியுமா, எடுத்துக் காட்டாக, பூஜ்யமாக இருக்க முடி யுமா? அதாவது, ''தலை''களே தோன்றாதிருக்க வேண்டும். அத்த கைய தொரு நிகழ்ச்சி கோட்பாட் டளவில் சாத்தியமே (இயற்கையின் விதிகளுக்கு அது முரண்பட்டதன்று), ஆனால், அதன் நிகழ்தகவு மிகவும் குறைவானதாகும். உண்மையில், இந்த நிகழ்தகவினை நாம் கணக்கிடு வோம் (அதிர்ஷ்டவசமாக, அத்தகை

யதோர் எளிமையான கணக்கிற்கு நாம் இப்போது தீர்வு காண (முடியும்). சாத்தியமான விளைவுகளான n ஐக் கணக்கிடவும். நாணயத்தை ஒவ்வொரு தடவை சுண்டியெறியும் போது இரண்டு விளைவுகள் ஏற்பட முடியும்: ''தலை'' அல்லது ''பூ''. ஒரு தடவை எறிதலின் இந்த இரண்டு விளைவுகளின் ஒவ்வொன்றையும் பிற எறிதல்களின் இரண்டு விளைவுகளில் ஒன்றோடு சேர்க்க முடியும். எனவே, சாத்தியமான விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 2^{100} ஆகும். ஒரே ஒரு விளைவே நமது நிகழ்ச்சிக்கு (அதாவது ஒரு தடவை கூட ''தலை'' தோன்றாதிருப்பதற்கு)ச் சாதகமாயுள்ளது; அதாவது, அதன் நிகழ்தகவு $1/_2{}^{100}$ என்றாகிறது. இது மிகமிகக் குறைவான மதிப்பு ஆகும்; 10^{-30} அளவினதாகும்; அதாவது, இந்த மதிப்பைக் குறிப்பிடும் எண்ணில் தசாம்சப் புள்ளிக்குப் பிறகு முப்பது பூஜ்யங்கள் இருக்கும். அத்தகைய நிகழ்தகவு மதிப்புடைய ஒரு நிகழ்ச்சியைச் செயலளவிலே சாத்தியமா

னதே இல்லை என நிச்சயமாகக் கருத முடியும். உண்மையில், நிகழ் தகவினின்றும் மேலும் மிகச் சிறிய அளவுகளில் வேறுபடும் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுகளும் செயலளவில் சாத்தியமே இல்லாதன.

பரிசோதனையின் தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமா யிருக்கும்போது, நிகழ்தகவுக்கும் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்கும் இடை யிலான எந்த அளவு விலகல்கள் செய லளவில் சாத்தியமானவையாக இருக் கும்? இக்கேள்விக்கு விடையளிப்ப தைச் சாத்தியமாக்கும் சூத்திரத்தை இப்போது நாம் கொடுப்போம். துர திர்ஷ்டவசமாக, இந்தச் சூத்திரத் தை நம்மால் மெய்ப்பிக்க முடியாது. (ஓரளவு இது சரி என்பது பின்னர் காட்டப்படும்); எனவே, தற்போ தைக்கு இது உண்மை என்பதை ஏற் றுக்கொண்டாக வேண்டும். மிக உயர்ந்த குடும்பத்தைச் சேர்ந்த, ஆனால், மிகவும் முட்டாளான ஒரு மாணவனுக்கு, புகழ்வாய்ந்த கணித வியலறிஞரான த'ஆலெம்பர்ட் என்

பவர் ஒரு தேற்றத்திற்கான மெய்ச் சான்றினை விளக்க முடியாத ஒரு நிலையில், ''நான் சொல்லுகிறேன், ஐயா, இந்தத் தேற்றம் உண்மை என்று!'' என உரக்கக் கூவினாராம். அவருடைய மாணவன் ''ஐயா, இதை ஏன் முன்னமேயே தாங்கள் சொல்ல வில்லை? நீங்கள் ஓர் உயர்ந்த மனி தர்; நானும் உயர் குடும்பத்தைச் சேர்ந்தவன். உங்கள் சொல்லே எனக்குப் போதுமானது!'' என்று கூறினான்.

N தடவைகள் தேர்வாய்வு முயற் சிகள் செய்வதாக வைத்துக் கொள் ளலாம்; அவற்றுள் ஒவ்வொன்றிலும் நிகழ்ச்சி A, P நிகழ்தகவு மதிப்புடன் தோன்றுகிறது. அப்போது, நிகழ்தக வின் மதிப்பு 0.95 என்றால், நிகழ்ச்சி யின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவின் மதிப்பு P*(A) என்பது

$$p \pm 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \qquad (2.3)$$

என்னும் இடைவெளியில் அமைந் துள்ளது.

(2.3) சூத்திரத்தினால் நிர்ணயிக்

கப்பெற்ற இடைவெளி, நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்குப் பொருத்தமானநம்பிக்கைஇடைவெளி என்று அழைக்கப்படும்; இது 0.95 நம்பிக்கை இடைவெளிக்குப் பொருத் தமாயுள்ளது. அதாவது, அடுக்கு நிகழ்வு விரைவின் மதிப்பு இந்த இடைவெளியின் வரம்புகளுக்குள் அமைந்திருக்கும் என்னும் நமது முன் னறிவிப்பு ஏறக்குறைய எல்லா நிகழ்ச்சிகளைப் பொறுத்த வரையி லும், திட்டமாகக், கூறப்போனால் 95 சதவீத நிகழ்ச்சிகளில் உண்மை யாயிருக்கும் என்பதனையே இது குறிக்கின்றது. 5 சதவீத நிகழ்ச்சிக ளில் என்னவோ நமது முன்னறிவிப்பு தவறாக இருக்கும் என்பது உண் மையே ஆனால்... மேலேயே ஏறாத வன் கீழே விழுவதில்லை அல்லவா? அதாவது, பிழைகளுக்குப் பயந்தால், தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சிக ளைப் பொறுத்த வரையில் முன்னறி விப்பு எதையும் செய்ய முயலாதீர் கள்—முன்னறிவிப்புகள் நிச்சயமாக நிறைவேற்றப்படுவதில்லை; ஏறத்

தாழ நிச்சயமாகவே அவை உண்மையாயுள்ளன.

பிழையின் நிகழ்தகவுக்கான மதிப்பான 0.05 என்பது உங்களுக்கு நிரம்பவும் அதிகம் எனத் தோன்றினால், கவனத்துடன் இருக்கும் பொருட்டு, நாம் சற்று அகலமான நம்பிக்கை டைவெளியினை எடுத்துக் கொள்ள முடியும்:

$$p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \tag{2.4}$$

இந்த இடைவெளி மிகவும் உயர்ந்த நம்பிக்கை இடைவெளியான 0.997 ஆக அமைகின்றது.

நமது முன்னறிவிப்பு முழு நம்பகமுள்ளதாய் இருக்க வேண்டும், அதாவது நம்பகக்கெழு ஒன்றுக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும் என்று நாம் நினைத்தால், அப்போது என்ன ஆகும்? அப்போது, நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு 0 மற்றும் 1 ஆகியவற்றிற்கிடையில் இருக்கும் என்று தான் நம்மால் உறுதி சொல்ல முடியும்—கணக்கீடுகள் எதுவும் இல்லாமலேயே நாம் சொல்லக் கூடிய

மிகச்சாதாரணமான ஒரு கூற்று ஆகும் இது.

அத்தியாயம் 1—இல் குறிப்பிட்டபடி, செயலளவில் நிச்சயமானது என நாம் கருதும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவின் மதிப்பு (அதாவது, நம்பிக்கை நிலை ஓரளவிற்குத் தன் போக்கிலான மதிப்பே ஆகும். அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினால் நிகழ்தகவினை நிர்ணயிப்பதில், திட்பநுட்பத்தின் மதிப்பீடுகளை இனிமேல் செய்யும் போது, நம்பிக்கை நிலைக்கு 0.95 என்னும் மிதமான மதிப்போ போதும் என்று நாம் ஏற்றுக் கொண்டு (2.3) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். சில சமயம் நாம் தவறு செய்தாலும் கூட, பயங்கரமான விளைவு எதுவும் நிகழ்ந்து விடாது.

நாணயம் ஒன்றை நூறு தடவைகள் சுண்டி எறியும்போது, ''தலை'' கள் தோன்றுவதற்கான அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுகளுக்கான, செயல் முறையில் சாத்தியமான மதிப்புகளின் இடைவெளியை, (2.3) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, நாம் மதிப்

பிடுவோம். நமது பரிசோதனையில் P=0.5, 1—P=0.5 *(2.3)* சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் கிடைப்பது

$$0.5 \pm 2\sqrt{\frac{0.25}{100}} = 0.5 \pm 0.1$$

ஆக, *0.95* நிகழ்தகவு *(நம்பிக்கை நிரை)* இருக்கும்போது, நாணயம் ஒன்றை *100* தடவை சுண்டி எறிந்தால், ''தலை''தோன்றும் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அதன் நிகழ் தகவிலிருந்து *0.1* அளவிற்கு மேல் வேறுபடாது என்று நாம் முன்னறிவுக்க முடியும். மனம் விட்டுச்சொல்வது என்றால், பிழையின் அளவு சிறியதன்று. அதைக் குறைப்பதற்கு நாம் என்ன செய்ய முடியும்? தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை N—ஐஅதிகரிக்கச் செய்ய வேண்டும் என்பது தெளிவு.

அதிகரிக்கச் செய்தால் நம்பிக்கை நிலையின் அளவு குறைகின்றது (துரதிர்ஷ்டவசமாக, நாம் விரும்பும் அளவிற்கு விரைவாக, $\sqrt{N}$லக்கு எதிர் விகிதத்தில், குறைவதில்லை). எடுத்

துக்காட்டாக, N=10,000 எனில், (2.3) சூத்திரம் தருவது 0.5 ± 0.01.

இதன் விளைவாக, ஒரு நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு மற்றும் நிகழ்தகவு ஆகியவற்றுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைப் பின் வருமாறு முறைமைப்படுத்திச் சொல்ல முடியும்.

ஒன்றையொன்று சாராத தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை போதிய அளவுக்கு அதிகமாயிருந்தால், அப்போது செயல் முறை நம்பிக்கையுடன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு நிகழ்தகவினுக்கு, விருப்பப்படும் அளவு நெருக்கமாய் அமைந்திருக்கும்.

இக்கூற்று, ஸர்நூலி தேற்றம், அல்லது பெரும் எண்ணிக்கைகளின் விதியின் மிக எளிய வடிவம் என அழைக்கப்பெறுகின்றது. மெய்ச்சான்று இல்லாமல் அதை நாம் இங்கே கொடுத்திருக்கிறோம்; ஆயினும், அதன் முறைமைத் தகுதியினைப் பற்றிப் பெரும் ஐயப்பாடுகள் எவையும் உங்களுக்கு இருக்க முடியாது.

இவ்வாறாக, ''ஒரு நிகழ்ச்சியின்

அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அதன் நிகழ் தகவினை நெருங்க முற்படுகிறது'' என்னும் கூற்றின் பொருளை நாம் விளக்கியிருக்கிறோம். இப்பொது, அடுத்த படிக்கு நாம் செல்ல வேண்டும்—நிகழ்ச்சி ஒன்றின் நிகழ்தக வினை அதன் அடுக்கு நிகழ்வு விரை வினைக் கொண்டு தோராயமாகக் கண்டு பிடித்து, இத்தோரயத்தின் பிழையை மதிப்புடவும். *(2.3)* சூத் திரத்தையே, அல்லது, நீங்கள் விரும் பினால் *(2.4)* சுத்திரத்தைப் பயன் படுத்தி இதைச் செய்ய முடியும்.

N எண்ணிக்கையுள்ள அதிக அளவு தேர்வாய்வு முயற்சிகளைச் செய்து, A நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரை $P^*(A)$ ஐக் கண்டு பிடித்திருப்பதாக வும் இப்போது தோராயமாக அதன் நிகழ்தகவினை நாம் கண்டு பிடிக்க விரும்புவதாகவும் வைத்துக் கொள் ளவும். சுருக்கமாகக் குறிப்பிடும் பொருட்டு, அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு $P^*(A)=p^*$ என்னும், நிகழ்தகவு $P(A)=p$ என்னும் குறிப்பிடு

வோம; நாம் காண வேண்டிய நிகழ் தகவு அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினுக் குத் தோராயமாகச் சமம் என்று வைத்துக் கொள்ளவும்:

$$p \approx p^*$$

(2.5) இல்செயல் முறையில் ஏற்படக் கூடிய அதிகப்பட்சப் பிழையினை நாம் இப்போது மதிப்பிடுவோம். இதன் பொருட்டு (2.3) சூத்திரத்தை நாம் பயன்படுத்துவோம்; அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினுக்கும் நிகழ்தகவினுக்குமி டையேயான சாத்தியமான அதிக பட்ச வேறுபர்ட்டினை (0.95 நம் பிக்கை நிலையுடன்) கணக்கிடுவதற்கு இது நமக்கு உதவும்.

''ஆனால், எப்படி?'' என்று நீங் கள் கேட்கலாம், ''நாம் நிர்ணயிக்க விரும்பும், தெரியாத நிகழ்தகவு P ஐ (2.3)சூத்திரம்உள்ளடக்கியுள்ளதே!''

நியாயமான கேள்வி. நீங்கள் சொல்வது முற்றிலும் சரியே! ஆனால் முக்கியமானது என்னவெனில், (2.3) சூத்திரம் நம்பிக்கை இடைவெளியின் **தோராயமான மதிப்பையே** தருகி

றது. நிகழ்தகவினில் உள்ள பிழையினைத் தோராயமாக மதிப்பையே (2.3) சூத்திரத்தில், நமக்குத் தெரிந்துள்ள அடுக்கு நிகழ்வு விரைவான p* அதற்குக் கிட்டத்தட்டச் சமமாயிருக்கும் தெரியாத நிகழ்தகவான pக்கு மாற்றாக வைக்கின்றோம்.

இவ்வாறு நாம் இந்த வழியில் அதைச் செய்வோம்! எடுத்துக்காட்டாக, பின்வரும் கணக்கிற்குத் தீர்வு காணபோம். N = 400 தேர்வாய்வு முயற்சிகள் உள்ள ஒரு தொடரில், அடுக்கு நிகழ்வு விரைவான p*யின் மதிப்பு 0.25 என்று கிடைத்திருப்பதாக வைத்துக்கொள்ளவும். நம் பிக்கை நிலையின் மதிப்பு 0.95 என்று வைத்துக் கொண்டு, நிகழ்தகவின் மதிப்பை அடுக்கு நிகழ்வு விரைவான 0.25க்குச் சமமாகக் கொண்டால், நிகழ்தகவின் மதிப்பில் ஏற்படக்கூடிய அதிகபட்ச, செயல்முறையில் சாத்தியமாயிருக்கக்கூடிய பிழையினைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

pக்கு மாற்றாக p*=0.25 என்று தோராயமாக வைத்துக் கொண்டு,

(2.3) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் நமக்குக் கிடைப்பது

$$0.25 \pm 2\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{400}}$$

அல்லது தோராயமாக 0.25 ± 0.043.

எனவே, அதிகப்பட்ச, செயல் முறையில் சாத்தியமாயிருக்கக் கூடிய பிழையின் மதிப்பு *0.043*.

அந்த அளவுத் திட்பநுட்பம் நமக்குப் போதிய அளவிற்கு உயர்ந்ததாய் இல்லை என்றால், நாம் என்ன செய்ய முடியும்? மேலும் அதிக அளவுத் திட்ப நுட்பத்துடன், எடுத்துக்காட்டாக, *0.01*க்கு மிகாத பிழையுடன் நிகழ்தகவினை அறிந்து கொள்ள வேண்டும் என்றால் நாம் என்ன செய்ய முடியும்? தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை நாம் அதிகரிக்கச் செய்ய வேண்டும் என்பது தெளிவு. ஆனால், எந்த மதிப்பிற்கு! இதைக் காணுவதற்கு, நமக்குப் பிடித்தமான *(2.3)* சூத்திரத்தையே நாம் மீண்டும் பயன்படுத்த வேண்டும். ஏற்கெனவேயே செய்யப்பெற்ற

தேர்வாய்வு முயற்சிகளின் தொடரில் நிகழ்தகவு P—ஐ அடுக்கு நிகழ்வு விரை $p^* = 0.25$ என்பதற்குச் சமமாக்கினால், *(2.3)* சூத்திரத்தின்படி நமக்குக் கிடைக்கும் அதிகப்பட்ச, செயல்முறையில் சாத்தியமாயிருக்கக் கூடிய பிழையின் மதிப்பு

$$2\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{N}}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பாகிய *0.01* என்பதற்கு இதைச் சமப்படுத்தவும்: $2\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{N}}$ சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு கண்டால், நமக்கு $N = 7500$.

ஆக, அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினைக் கொண்டு, பிழையின் அளவு *0.01*க்கு மேற்படாத வகையில் (நம்பிக்கை நிலை அளவு *0.95*) *0.25* அளவிலான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுவதற்கு (அடேயப்பா!) *7500* பரிசோதனைகளை நாம் செய்ய வேண்டும்.

(2.3) [அல்லது அதற்கு ஒப்பான

(2.4)] சூத்திரம் நமக்கு இன்னொரு கேள்விக்கு விடை காணவும் உதவ முடியும்: அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினுக்கும்நிகழ்தகவினுக்கும் இடையேயுள்ள விலகலை தற்செயல் நேர்வுக் காரணிகளினால் விளக்க முடியுமா அல்லது நிகழ்தகவு நாம் நினைப்பது போல் இல்லையா என்பதை இந்த விலகல் குறிக்கின்றதா?

எடுத்துக்காட்டாக, நாணயம் ஒன்றை N = 800 தடவைகள் நாம் சுண்டி எறிகின்றோம்: ''தலை''கள் தோன்றுவதன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவின் மதிப்பு 0.52 என்று தெரிகிறது. நாணயம் சமநிலையில் இல்லாமல் இருப்பதாகவும் ''பூ''க்கள் விழுவதைக் காட்டிலும் ''தலை''கள் அதிக அளவிற்கு அடிக்கடி விழுவதாகவும் நாம் சந்தேகப்படுகிறோம். நமது சந்தேகம் நியாயமானது தானா?

இந்த வினாவிற்கு விடை காணும் பொருட்டு, எல்லாம் ஒழுங்கான இருக்கின்றது. அதாவது, நாணயம் சமநிலையில் இருக்கிறது, ''தலை''கள் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு

வழக்கமான அளவில், அதாவது 0.5 ஆக உள்ளது, என்னும் கருத்தை ஆதாரமாக வைத்துக் கொண்டு, ''தலை''கள் தோன்றுவது'' என்னும் நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ் விரைவிற்கான நம்பிக்கை இடைவெளியினை (0.95 நம்பிக்கை நிலைக்கு)க் கண்டுபிடிப்போம். பரிசோதனையின் விளைவாகப் பேறப்பட்ட 0.52 மதிப்பு இந்த இடைவெளிக்குள் இருந்தால், நல்லது. அவ்வாறு இல்லை எனின், நாணயத்தின் உருவொழுங்கு சந்தேகிக்கப்பட வேண்டியதாய் அமைகின்றது. ''தலை''கள் தோன்றுவதன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்கு இந்த இடை வெளியின் மதிப்பு 0.5 ± 0.035 என்பது (2.3) சூத்திரத்திலிருந்து கிடைக்கின்றது. நமது பரிசோதனையில் பெறப்பட்ட அடுக்கு நிகழ்வு விரைவின் மதிப்பு இந்த இடைவெளிக்குள்ளாகவே இருக்கின்றது. இது, நாணயத்தின் உருவொழுங்கு சந்தேகத்திற்கு அப்பாற்பட்டதாக உள்ளது என்பதைக் குறிக்கின்றது.

அம்மாதிரியான வழி முறைகள், தொடர்பின்மைவகை நிகழ்ச்சிகளில் காணப்படும், சராசரி மதிப்பிலிருந்து மாறுபட்டு இருக்கும் விலகல்கள் தற் செயலானவையா அல்லது ''கவனத் திற்குரியனவா'' (எடுத்துக்காட்டாக, சில சாமான் கட்டுகளில் காணப்படும் எடைக் குறைவு தொடர்பில்லாத ஒன்றா, அல்லது, அது தரசின் குறை பாட்டைக் காட்டுவதா; குணமடை யும் நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை யில் ஏற்படும் அதிகரிப்பு, அவர்கள் பயன்படுத்திய மருந்து ஒன்றினாலா அல்லது தற்செயலாக நிகழ்ந்ததா) என்பதை மதிப்பீடு செய்வதற்குப் பயன்படுத்தப் பெறுகின்றன.

இவ்வாறாக, பண்டைய முறை மாதிரியினால், விவரிக்கப்பட முடி யாத பரிசோதனைகளில் புள்ளியி யல் விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு நிகழ்ச்சியின் தோராஈயமான நிகழ்த கவினைக் கண்டு பிடிப்பதற்குக் கற் றுக் கொண்டுள்ளோம்; சாத்தியமான பிழையின் அளவை மதிப்பிடவும் நம் மால் முடியும்.

''நிகழ் தகவுக்கோட்பாடு என்ன அறிவியல்!'' என்று நீங்கள் அறியலாம். (2.1) சூத்திரத்தினால் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினை நாம் கணக்கிட முடியாவிட்டால், ஒரு பரிசோதனையைச் செய்ய வேண்டும்; நாம் சோர்வுற்று அயர்ந்து போகும் வரை அதை மீண்டும் மீண்டும் செய்து கொண்டே இருக்க வேண்டும்; பின்னர், நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினைக் கணக்கிட்டு, அதை நிகழ் தகவினுக்குச் சமமாக்க வேண்டும்; அதன் பிறகு, ஒருக்கால், சாத்தியமான பிழையின் அளவை கணக்கிடும் நிலைமை நமக்குக் கிடைக்கும். என்ன தொல்லை!''

நீங்கள் நினைப்பது இது வாயின், நீங்கள் முற்றிலும் தவறு! நிகழ் தகவினை நிர்ணயிப்பதற்குப் புள்ளியியல் வழி முறை ஒன்று தான் உள்ளது என்பதில்லை; மேலும், அடிப்படையான வழி முறையிலிருந்து அது நிரம்பவும் விலகியுள்ளது. நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் நேரடியான வழிமுறைகளை விட மறை முகமான வழி

முறைகளே பெருமளவிற்குப் பயன் படுவனவாய் உள்ளன. நமக்கு அக் கறை உள்ள நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்த கவினை, அவற்றுடன் தொடர்பு கொண்ட பிற நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ் தகவுகளைக் கொண்டு, அதாவது, சிக்கலான நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு களை எளிமையான நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் வாயிலாக—இவ் எளிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுக ளையே மேலும் எளிமையான நிகழ்ச் சிகளின் நிகழ்தகவுகள் வாயிலாக என்று—நாம் குறிப்பிடுவதை மறை முக வழி முறைகள் சாத்தியமாக்கு கின்றன. மிகமிக எளிமையான நிகழ்ச் சிகள் வரை இதை நாம் தொடர்ந்து செய்து கொண்டே போக முடியும்; இம்மிக மிக எளிமையான நிகழ்ச்சி களின் நிகழ் தகவுகளை (2.1) சூத்தி ரத்தினால் கணக்கிட முடியும்; அல் லது அவற்றின் அடுக்கு நிகழ்வு விரை வுகளினால் பரிசோதனை வாயிலாகக் கண்டு பிடிக்க முடியும். பிந்தைய வழி முறையில் நாம் பரிசோதனை களை நிகழ்த்த வேண்டும் அல்லது

புள்ளியியல் விவரங்களைத் திரட்ட வேண்டும் என்பது தெளிவு. இயன்ற வரை நிகழ்ச்சிகளின் தொடரை நீட்டிக் கொண்டே போக வேண்டும்; தேவைப்படும் பரிசோதனையைச் சாத்தியமான அளவிற்கு வளிமையானதாகச் செய்ய வேண்டும். தகவலைப் பெறுவதற்குத் தேவையான எல்லாப் பொருள்களிலும் நிரம்பவும் மலிவாக இருப்பவை, ஆராய்ச்சியாளர் செலவிடும் நேரமும் அவன் பயன்படுத்தும் காகிதத்தாளும் தான் எனவே, பரிசோதனைகளைப் பயன்படுத்தாமல், கணக்கீடுகளைப் பயபடுத்தியே எவ்வளவு தகவல் பெற முடியுமோ அவ்வளவைப் பெறுவதற்கு நாம் முயல வேண்டும்.

அடுத்த அத்தியாயத்தில், எளிமையான நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கொண்டு, சிக்கலான நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடும் வழிமுறைகளைப் பற்றிக் கவனிப்போம்.

நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் அடிப்படை விதிகள்.

நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் பிரதானமான வகிப்பது நேரடியான வழிவகைகள் அல்ல, முறை முகமான வழிவகைகளே என்பதையும், சில நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை வேறு, மேலும் எளிமையான நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளினால் கணக்கிடுவதை அவை சாத்தியமாக்குகின்றன என்பதையும் நாம் சென்ற அத்தியாயத்தில் வலியுறுத்தினோம். இவ்வத்தியாயத்தினில் இவ்வழிவகைகளைப் பற்றிக் கவனிப்போம். அவை யாவும் நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் இரண்டு முக்கியமான சித்தாந்தங்களை அல்லது விதிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டனவாகும்: 1) நிகழ்தகவுக் கூட்டல் விதி மற்றும் 2) நிகழ்தகவுப் பெருக்கல் விதி.

1. நிகழ்தகவுக் கூட்டல் விதி.

பாஸ்பரம் தனித்திருக்கும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்றன் நிகழ்தகவு (அவற்றுள் எது நிகழ்கிறது என்பதைப்பற்றி அக்கறையில்லை) இந்நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ் தகவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

இவ்விதியினை ஒரு சூத்திரத்தினால் குறிப்பிடுவோம். மற்றும் என்பன பரஸ்பரம் தனித்திருக்கும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளையாக இருக்கட்டும். அப்போது

$$P(A \text{ அல்லது } B) = P(A) + P(B) \quad (3.1)$$

''இவ்விதி எங்கிருந்து தோன்றுகிறது? அது ஒரு தேற்றமா அல்லது மெய்ச்சான்று காட்டப்படாத அங்ஙனமே ஏற்றுக் கொள்ளப் பெற்ற ஓர் உண்மைக்கூற்றா?'' என்று நீங்கள் கேட்கலாம். அது இரண்டுமே ஆகும். செந்நிலை அது மாதிரியினால் விவரிக்கப்படும் நிகழ்ச்சிகளில் அது திட்டமாக மெய்ப்பிக்கப்பட முடியும். உண்மையில், A மற்றும் B என்பன பரஸ்பரம் தனித்திருக்கும் நிகழ்ச்

சிகள் எனில், A அல்லது B என்னும் சிக்கலான நிகழ்ச்சியினைக் குறிக்கும் விளைவுகளின் எண்ணிக்கை $m_A + m_B$ என்பதற்குச் சமமாகும்; எனவே

$$P(A \text{ அல்லது } B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} =$$
$$= P(A) + P(B)$$

இக்காரணம் பற்றி, கூட்டல் விதி ''கூட்டல் தோற்றம்'' என்று அடிக்கடி அழைக்கப் பெறுகின்றது. ஆனால், செந்நிலை மாதிரியினால் விவரிக்கப் பெறும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு மட்டுமே ஆன தேற்றம் அது என்பதை நீங்கள் மறந்து விடக் கூடாது, வேறு நிகழ்ச்சிகளைப் பொறுத்த வரை, அது மெய்ச்சான்று எதுவும் இல்லாது, ஒரு சித்தாந்தம் அல்லது அங்ஙனமே ஏற்றுக் கொள்ளப் பெற்ற உண்மைக்கூற்று என்றே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுகளுக்கு (புள்ளியியல் நிகழ்தகவுகளுக்குக் கூட்டல் விதி உண்மையாயிருக்கிறது என்பதைக் குறிப்பிட வேண்டும்; இதை

நீங்கள் மெய்ப்படுத்திக் காட்ட முடியும்.

கூட்டல் விதியை எத்தனை நிகழ்ச்சிகளுக்கு வேண்டுமானாலும் எளிமையாகப் பொதுமைப்படுத்த முடியும்: **பரஸ்பரம் தனித்திருககும் பல நிகழ்ச்சிகளின் ஒன்றின் நிகழ்தகவு (அவற்றுள் எது நிகழ்கிறது என்பதைப் பற்றி அக்கறையில்லை). இந்நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.**

இவ்விதி, சூத்திரத்தினால் பின்வருமாறு குறிக்கப்பெறுகின்றது. A_1, $A_2 \ldots A_n$ என்பன பரஸ்பரம் தனித்திருக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், P(A, அல்லது $A_2 \ldots$ அல்லது A_n)

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

நிகழ்தகவுக்கூட்டல் விதிக்கு முக்கியமான சில கிளைத் தோற்றங்கள் உள்ளன. முதலாவதாக, $A_1, A_2, \ldots A_n$ **என்பன பரஸ்பரம் தனித்திருக்கும், யாவும் அளாவிய நிகழ்ச்சிகள் எனில், அவற்றின் நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகை ஒன்றுக்குச் சமமாகும்.** (இக்கிளைத் தேற்றத்தினை மெய்ப்பிக்க

முயலவும்.) இரண்டாவதாக, முதல்கிளைத் தேற்றத்தின் கிளைத் தேற்றம்) A என்பது ஒரு நிகழ்ச்சியா கவும் $\bar{A}$ என்பது எதிரிடையான நிகழ்ச் சியாகவும் (நிகழ்ச்சி A நிழாதிருப்பது) இருந்தால்,

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \tag{3.2}$$

அதாவது, **எதிரிடையான நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்ச்சிகளின் கூட்டுத்தொகை ஒன்றுக்குச் சமமாகும்.**

(3.3) சூத்திரம் ''எதிரிடையான நிகழ்ச்சிக்கான பெயர்வு வழிவகை''க்கு அடிப்படையாகப் பயன்படுகின்றது; இவ்வழி வகை நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டில் விரிவான அளவிற்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. குறிப்பிட்டதொரு நிகழ்ச்சி A—இன் நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுவது பல சமயம் கடினமாயிருக்கும்; ஆனால், எதிரிடையான நிகழ்ச்சியான $\bar{A}$—இன் நிகழ் தகவினைக் கணக்கிடுவது எளிதாயிருக்கும். இப்போது, $P(\bar{A})$ நிகழ் தகவினைக் கணக்கிட்டு, அதை ஒன்றிலிருந்து கழித்து விட முடியும்;

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \qquad 3(.4)$$

2. நிகழ் தகவுப்பெருக்கல் விதி

இரு நிகழ்ச்சிகளின் சேர்க்கையின் (அதாவது அவை இரண்டும் ஒரே சமாயத்தில் நிகழ்வதன் நிகழ்தகவு, அவற்றுள் ஒன்றன் நிகழ்தகவினால் பெருக்கப்பட்ட மற்றொன்றின் நிகழ்தகவிற்குச் சமமாகும்; முதலாவது நிகழ்ச்சி ஏற்கனவேயே நிகழ்ந்து விட்டிருக்க வேண்டும்.

இவ்விதியினை P(A *மற்றும்* B)=

$$= P(A) \cdot P(^{B}/_{A}) \qquad (3.5)$$

என்னும் சூத்திரத்தினால் விவரிக்க முடியும்: இங்கு, $P^{B}/_{A}$ *என்பது நிகழ்ச்சி* A *நிகழ்ந்துள்ளது என்னும் (அது நிகழ்ந்துள்ளது என்று வைத்துக் கொள்ளப்பெற்ற) முன்வரைக்குக் கணக்கிடப்பட்டுள்ள, நிகழ்ச்சின் முன்வரையறை நிகழ்தகவு எனப்படுவதைக் குறிப்பதாகும்.*

நிகழ்தகவுப் பெருக்கல் விதி, செந்நிலை மாதிரியின் அமைப்பினுக்குட்பட்டு திட்டமாக மெய்ப்பிக்கக் கூடிய ஒரு தேற்றமும் ஆகும்; வேறு நிலேகளில் சான்று இல்லாது அங்ங

னமே ஏற்றுக் கொள்ளப்பெற்ற ஒரு **சித்தாந்தம்**அல்லது **வெளிப்படை உண்மை** எனக் கொள்ளல் வேண்டும். அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுகளுக்கும் (புள்ளியியல் நிகழ்தகவுகளுக்கும்) அது பின் பற்றப்படுகின்றது.

நிகழ்தகவுப் பெருக்கல் விதி பயன் படுத்தப்படும் போது, நிகழ்ச்சிகளுள் எது ''முதலாவது'', எது ''இரண்டாவது'' என்பதெல்லாம் ஒன்று தான். இவ்விதியினைப்பின் வரும் வடிவிலும் எழுத முடியும்.

$$P(A \text{ மற்றும் } B) = P(B) \cdot P(^{A}/_{B}) \qquad (3.6)$$

கணக்கு 3.1. தாழியில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் 4 கறுப்புப் பந்துகளும் இருக்கட்டும். ஒன்றன் பின் ஒன்றாக இரண்டு பந்துகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன. இந்தப் பந்துகள் இரண்டும் வெளுப்பாய் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு: இரண்டு நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக்கொள்ளவும்: A முதலாவது பந்து வெளுப்பு; B இரண்டாவது பந்

தும் வெளுப்பு. இந்நிகழ்ச்சிகளின் (முதலாவது மற்றும் இரண்டாவது பந்துகள் இரண்டும் வெளுப்பாயிருப்பதன் சேர்மானத்தின் நிகழ் தகவினை நாம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும். நிகழ் தகவுப் பெருக்கல் விதியின்படி

$$P(A \text{ மற்றும் } B) = P(A) \cdot P(B/A);$$

இதில் P(A) என்பது முதலாவது பந்து வெளுப்பாயிருப்பதைக் குறிப்பதாகும்; $P^{A}/_{B}$ என்பது (முதலாவது பந்து வெளுப்பாயிருக்கும் என்னும் முன் வரையறையுடன் கணக்கிடப்பட்ட), இரண்டாவது பந்தும் வெளுப்பாயிருக்கும் என்னும் முன் வரையரை நிகழ்தகவு ஆகும்.

$P(A) = 3/7$ என்பது தெளிவு, $P(B/A)$ ஐக் கணக்கிடுவோம். முதலாவது வெளுப்பு எனில், இரண்டாவது பந்து இரண்டு பந்துகள் வெளுப்பாயுள்ள எஞ்சிய 6 பந்துகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றது, எனவே, $P(B/A) = 2/6 = 1/3$ இதிலிருந்து கிடைப்பது

$$P(A \text{ மற்றும் } B) = \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 1/7$$

நிற்க, இதே முடிவினை வேறு ஒரு வழி வகையினை—சாத்தியமான விளைவுகளின் நேரடியான கணக்கீட்டினைப் — பயன்படுத்தி, நாம் முன்னரே பெற்றுள்ளோம் (1.4 கணக்கைப் பார்க்கவும்).

ஆக, தாழியிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படும் இரண்டுபந்துகள் வெளுப்பாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $^1/_7$. இப்போது, பின்வரும் வினாவிற்கு விடையளிக்கவும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இல்லாது, ஒரே சமயத்தில் இரண்டு பந்துகளையும் நாம் வெளியே எடுத்தால் முடிவு வேறு விதமாய் இருக்குமா! மேலாகப் பார்க்கும் போது அது வேறுவிதமாய் இருக்கும் என்பது போலத் தோன்றலாம். ஆனால், சற்று நேரச் சிந்தனைக்குப் பிறகு, தீர்வு மாறாது என்பதனை நீங்கள் கவனிப்பீர்கள்.

தாழியிலிருந்து இரண்டு பந்துகளை ஒரே சமயத்தில், ஆனால், இரு கைகளினாலும் நாம் எடுப்பதாக வைத்துக் கொள்ளவும். வலது கையில் இருப்பதை ''முதலாவது பந்து'' என

வும் இடது கையில் இருப்பதை ''இரண்டாவது பந்து'' எனவும் வைத்துக் கொள்வோம். 3.1 கணக்கின் தீர்வில் பயன்படுத்தியதிலிருந்து நமது ஆய்வு முறை வேறாக இருக்குமா? இருக்கவே இருக்காது! இரண்டு பந்துகள் வெளுப்பாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு அதாகவே இருக்கும்: $1/_7$ ''ஆனால், பந்துகளை ஒரே கையினால் எடுத்தால்'' என்று ஒருவர் விடாது கேட்கலாம். ''அப்போது, கட்டை விரலுக்கு அருகாமையில் இருப்பதை ''முதலாவது பந்து''என்றும் சுண்டு விரலுக்கு அருகாமையில் இருப்பதை'' இரண்டாவது பந்து'' என்றும் நாம் அழைப்போம். ''ஆனால்''... என்று நமது நம்பிக்கையில்லாத கேள்வியாளர் நிறுத்தாமல் மேலே போனால், ''இன்னமும் நீங்கள் கேட்க வேண்டுமானால்... நீங்கள் வெட்கப்பட வேண்டும்'' என்றே நாம் மறு மொழி சொல்வோம்.

சிறப்பாக, **சார்பில்லாதவை** என அழைக்கப்பெறும் குறிப்பிட்ட ஒரு

வகை நிகழ்ச்சிகளைப் பொறுத்த வரை, நிகழ்தகவுப் பெருக்கல் விதி நிரம்பவும் எளிமையாக அமைந்து விடுகிறது. A, B என்னும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்றின் நிகழ்வு மற்றொன்றின் நிகழ் தகவினைப் பாதிக்காமல் இருந்தால், அதாவது, B நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்து விட்டிருக்கிறது என்னும் அடிப்படையில் கணிக்கப் படும். முன் வரையறை நிகழ்தகவு, அவ்விடிப்படை இல்லாத நிலையிலும் மாறாமல் அங்ஙனமே இருந்தால், A மற்றும் B சார்பில்லாத நிகழ்ச்சிகள் என்றழைக்கப் பெறுகின்றன:

$$P(A/B) = P(A) \qquad (3.7)$$

எதிர் மறையான நிலையில் A மற்றும் B நிகழ்ச்சிகள் **சார்புடையவை** (நிகழ்ச்சிகளின் சார்புடைமை அல்லது சார்பில்லாமை எப்போதும் பரஸ்பரமானது, அதாவது $P(A/B) = P(A)$ என்றால், $P(B/A) = P(B)$ என்பதை மெய்ப்பிப்பது எளிது. நிகழ்தகவுப் பெருக்கல்விதியின் ஒரு வடிவங்களான (3.5) மற்றும் (3.6) ஆகி

யவற்றைப் பயன்படுத்தி, வாசகர் அதைத் தனியாகக் செய்ய முடியும்) எனப்படுகின்றன.

3.1 கணக்கில், தாழியிலிருந்து வெளியே எடுக்கப்பெற்ற இரண்டாவது பந்து வெளுப்பாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு முதலாவது பந்து வெளுப்பா அல்லது குறுப்பா என்பதனைச் சார்ந்திருப்பதால், நிகழ்ச்சிகள் A மற்றும் B சார்புடையவை ஆகும். இப்போது பரிசோதனையின் நிலைகளை நாம் மாற்றுவோம். தாழியிலிருந்து வெளியில் எடுக்கப் பெற்ற முதலாவது பந்தை மீண்டும் தாழியிலிட்டு, அதை எஞ்சிய பந்துகளுடன் கலந்து விட்டு, பின்னர் மறுபடியும் ஒரு பந்தை வெளியே எடுப்பதாக வைத்துக் கொள்ளவும். அத்தகையதொரு பரிசோதனையில், நிகழ்ச்சி A (முதலாவது பந்து வெளுப்பாயிருப்பது) மற்றும் நிகழ்ச்சி (இரண்டாவது பந்து வெளுப்பாயிருப்பது) சார்பில்லாதவை ஆகும்:

$$P(B/A) = P(B) = 3/7$$

நிகழ்ச்சிகளின் சார்புடைமை மற்றும் சார்பில்லாமை என்னும் கருத்துகள் நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டில் நிரம்பவும் முக்கியமானவை. இக்கருத்துக்களை முழுவதும் புரித்து கொள்ளாதிருப்பது அடிக்கடி தவறுகளுக்கு வழி கோருகின்றது. இந்நிலை முக்கியமாக, தொடக்க நிலை மாணவர்கள் நிகழ்ச்சிகளின் சார்புடைமை இருக்கும்போது அதை மறந்து விடும் போதோ, அல்லது மாறாக, உண்மையிலேயே சார்பில்லாத நிகழ்ச்சிகளின் சார்புடைமை இருப்பதாக நினைக்கும்போதோ அடிக்கடி ஏற்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டாக, நாணயம் ஒன்றைப் பத்துத்தடவை சுண்டு எறியும் போது, ஒவ்வொரு தடவையும் ''தலை'' விழுவதாக வைத்துக் கொள்வோம். நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் தேர்ச்சியில்லாத ஒருவனிடம் பின்வரும் கேள்வியைக் கேட்போம்: ''பதினோராவது தடவையில் எது நிகழ்வதற்கு அதிகத் தகவு உள்ளது. ''தலையா'', ''பூவா''?

''பெரும்பாலும் நிச்சயமாக அவன் பின்வருமாறு விடையளிப்பான்: ''நிச்சயம், ''பூ'' தான்! ஏற்கெனவே ''தலை'' பத்து தடவை தோன்றி விட்டது. எவ்வாறாயினும் அது ஈடு செய்யப்பட்டாக வேண்டும்; எனவே, கடைசியில் ''பூ'' தோன்ற ஆரம்பிக்க வேண்டும்!'' அங்ஙனம் அவன் கூறினால் அது முற்றிலும் தவறு; ஏன் எனில், அடுத்த ஒவ்வொரு தடவையிலும் (நாணயத்தைச் சரியான முறையில் சுண்டினால், அதாவது, கட்டைவிரலின் நகத்தின் மீது வைத்து அதை மேற்புறமாகச் சுண்டினால்) ''தலை'' விழுவதற்கான நிகழ் தகவு, ஏற்கெனவே ''தலை'' தோன்றிவிட்ட தடவைகளை முற்றிலும் சார்ந்திருப்பதில்லை. நாணயம் சரியானதாய் இருந்தால் (அதாவது, வளைவு, நசுங்கல் எதுவும் இல்லாமல் இருந்தால்), பதினோராவது தடவை சுண்டும் போதும், முதல் தடவையைப் போன்றே, ''தலை'' தோன்றும் நிகழ்தகவு ஆகவே இருக்கின்றது. பத்துத் தடவைகள் வரிசையாகத்

''தலை'' தோன்றுவது, நாணயத்தின் ஒழுங்கான அமைப்பைப் பற்றிய சந்தேகங்களுக்கு இடமளிக்கலாம் என்பது வேறு. ஆனால், அந்நிலையில், (பதினோராவது தடவையையும் உள்ளிட்ட!) ஒவ்வொரு சுண்டுதலின் போதும் ''தலை'' தோன்றுவதற்கான நிகழ் தகவும் $1/_2$— ஐ விட அதிகமே இருக்குமே அல்லாது, குறைவாக இருக்காது என்றே நாம் சந்தேகிக்க வேண்டும்.

''இங்கு எதோ தவறு உள்ளது'' என்று நீங்கள் கூறலாம். ''வரிசையாகப் பத்துத் தடவை ''தலை''தோன்றியிருந்தால், பதினோராவது தடவையில் ''பூ'' விழுவதற்கான நிகழ் தகவு அதிகமாயிருக்காது என்பது இருக்க முடியாது!''

இதைப் பற்றி விவாதிக்கலாம். ஒராண்டிற்கு முன் நீங்கள் நாணயம் ஒன்றைச் சுண்டியெறிந்ததில் பத்துத் தடவைகள் ''தலை'' தோன்றியதாக வைத்துக் கொள்ளலாம். இன்று அந்த விசித்திரமான முடிவினை நினைவிற்குக் கொணர்ந்து, நாண

யத்தை மீண்டும் ஒரு முறை சுண்டி யெறியும் முடிவிற்கு வந்திருக்கிறீர் கள். ''பூ'' விழுவது ''தலை''தோன் றுவதனை விட அதிக அளவிற்கு நிகழ் தகவுள்ளது என்று இன்னமும் நீங்கள் நினைக்கிறீர்களா? ஒரு வேளை நீங்கள் இப்போது அத்தனை நிச்சயமாக இல்லை.

வாதத்தினை அறுதிப்படுத்தும் பொருட்டு, வேறு யாரயாவது ஒரு வர். புள்ளியியல் அறிஞர் கே. பியர் ஸன் என்று வைத்துக் கொள்ளுங்கள், பல ஆண்டுகளுக்கு முன் நாணயம் ஒடன்றை 24,000 தடவை சுண்டி எறிந்து, ஏதோ பத்துத் தடவைகள் வரிசையாகப் பத்துத் தடவைகளும் ''தலை'' விழுந்ததாக வைத்துக் கொள்ளலாம். இன்று அவ்விவரத் தை நினைவிற்குக் கொணர்ந்து, அவர் பரிசோதனையைத் தொடர்ந்து செய்ய—மேலும் ஒரு தரம் நாணயத் தைச் சுண்டியெறிய முடிவு செய்கி றீர்கள். ''தலையா'', ''பூவா''— எதற்கு அதிக நிகழ் தகவு இருக்கின் றது? நீங்கள் ஏற்கனவேயே உண்

மையை உணர்ந்து கொண்டு விட்ட தாக, இந்நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ் தகவு சமமானது என்று ஒப்புக் கொண்டு விட்டதாக எண்ணுகிறேன்.

நிகழ் தகவு பெருக்கல் விதியை A_1, A_2,... A_n என்று பல நிகழ்ச் சிகளுக்கு நாம் விரிவுபடுத்துவோம். பொது நிலையில், நிமழ்ச்சிகள் சார் பில்லாதனவாய் இல்லாமலிருக்கும் போது, நிகழ்ச்சிகளின் சேர்மானத் தின் நிகழ் தகவு பின் வருமாறு கணக் கிடப்படுகிறது: ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவு இரண்டாவது நிகழ்ச்சி யின் முன் வரையறை நிகழ் தகவி னால் (முதல் நிகழ்ச்சி நடந்து விட்டி ருக்க வேண்டும்) பெருக்கப்படுகின் றது. பின்னர், மூன்றாவது நிகழ்ச்சி யின் முன் வரையறை நிகழ் தகவி னால் (முந்தைய இரண்டு நிகழ்ச்சிக ளும் நடந்து விட்டிருக்க வேண்டும்) பெருக்கப்படுகின்றது; இவ்வாறு தொடர்ந்து செய்யப்படுகின்றது. இவ்விதியைச் சூத்திரத்தினால் நாம் குறிக்க வேண்டாம். வாங்கிய வடி வில் அதை நெட்டுருபோடுவது

மேலும் வசதியானதாயிருக்கின்றது.

கணக்கு 3.2. தாழியில் உள்ள ஐந்து பந்துகளுக்கு இலக்கம் இடுவோம். அவற்றை ஒன்றன் பின் ஒன்றாகத் தாழியிலிருந்து வெளியே எடுப்போம். பந்துகளின் எண்கள் அதிகரிக்கும் வரிசையில் தோன்றுவதற்கான நிகழ் தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு (இங்கும், அடியிலும், சொல்வதை எளிதாக்கும் பொருட்டு, நிகழ்ச்சிகளுக்கு எழுத்துக் குறியீடுகள் தராது, மாற்றாக, நிகழ் தகவுக் குறியீடான ஐத் தொடர்ந்து, தனியாக பயிலப்படும் நிகழ்ச்சியின் சுருக்கமான மற்றும் புரியும் படியான விவரவடிவைக் கொடுக்கலாம். குறியீடுகள் குறைவாய் இருக்க இருக்க அத்துணை நல்லது!) நிகழ் தகவுப் பெருக்கல் விதியின் படி,

$$P(1, 2, 3, 4, 5) = (^1/_5) \cdot (^1/_4) \cdot (^1/_3) \cdot (^1/_2) \cdot 1 = {}^1/_{120}.$$

கணக்கு 3.3. சிறுவன் ஒருவன் பள்ளிக்கூடத்திற்கு எடுத்துச் செல்லும் பையில் இரண்டு a (ம), மூன்

c (ல), மூன்று t (ர்) என்று 8 அரிச்சுவடி அட்டைகள் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். மூன்று அட்டைகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக வெளியே எடுத்து, எடுத்த வரிசைப்படியே அவற்றை மேஜையின் மீது வைப்போம். "cat" (''மலர்'') என்றும் சொல் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

$$P\,(„cat") = (^3/_8)\cdot(^2/_7)\cdot(^3/_6) = {^3/_{56}}.$$

இப்போது அதே கணக்கிற்கு வேறு ஒரு வடிவில் தீர்வு காணமுயல்வோம். எல்லா நிலைகளும் அங்ஙனமே உள்ள; ஆனால், எழுத்துக்கள் உள்ள அட்டைகள் ஒரே சமயத்தில் வெளியே எடுக்கப் பெறுகின்றன. வெளியே எடுக்கப் பெற்ற எழுத்துக்களிலிருந்து "cat" (''மலர்'') என்னும் சொல் நமக்குக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

''இன்னொன்றைச் சொல்லுங்கள்'' என்று நீங்கள் நினைக்கலாம். ''அட்டைகளை ஒரே சமயத்தி

லேயோ அல்லது ஒன்றன்பின் ஒன்றாகவோ வெளியே எடுத்தாலும் ஒன்று தான் என்று எனக்கு நினைவு நிகழ்தகவு $^{3}/_{56}$ ஆகவே இருக்கும்.''

உண்மையில், நீங்கள் அவ்வாறு நினைத்தீர்கள் எனில், அது தவறு. (இல்லை எனில், நாங்கள் மன்னிப்புக் கோருகிறோம்.) கவனிக்க வேண்டிய விவரம் என்னவெனில், அட்டைகள்ன வெளியே எடுப்பதற்கான நிபந்தனைகளை மட்டுமல்ல, நிகழ்ச்சியையே நாம் மாற்றிவிட்டிருக்கிறோம். 3.3 கணக்கில் "c" (''ம'') எழுத்து முதலாவதாகவும், "a" (''ல'') இரண்டாவதாகவும் "t" (''ர்'') மூன்றாவதாகவும் இருக்க வேண்டும் என்று நாம் குறிப்பிட்டோம். ஆனால், இப்போது எழுத்துக்களின் வரிசை முக்கியமில்லை. [அது "cat" (''மலர்'') அல்லது "act" (''லமர்'') அல்லது "tac" (''ர்மல'') என்று இருக்க முடியும்.) நாம் சம்பந்தப்பட்ட நிகழ்ச்சி A.

A — வெளியே எடுக்கப்பெற்ற எழுத்துக்களிலிருந்து "cat" (''மலர்') என்னும் சொல்லை அமைக்க முடி

வது—பல வேறுபாடுகளாகப் பிரிகின்றது:

A ["cat" (''மலர்'') அல்லது "act" (''லமர்'') அல்லது "tac" (''ர்லம'') அல்லது...]

எத்தனை வேறுபாடுகள் நமக்குக் கிடைக்க முடியும்? அவற்றின் எண்ணிக்கை மூன்று உறுப்புக்களின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாயிருக்கும்:

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

இந்த ஆறு வேறுபாடுகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிட்டு, அவற்றை நிகழ் தகவுக் கூட்டல் விதியின் படி கூட்ட வேண்டும். இவ்வேறுபாடுகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் சமமாயிருக்கும் என்பதைக் காட்டுவது எளிது:

P [„act" (''லமர்'')] $= (^2/_8) \cdot (^3/_7) \cdot (^3/_6) = {}^3/_{56}$,

P [„tac" (''ர்லம'')] $= (^3/_8) \cdot (^2/_7) \cdot (^3/_6) = {}^3/_{56}, \ldots$

அவற்றைக் கூட்டினால், நமக்குக் கிடைப்பது

$$P(A) = (^3/_{56}) \cdot 6 = {}^9/_{28}.$$

நிகழ் தகவுப் பெருக்கல் விதி, $A_1, A_2 \ldots A_n$ நிகழ்ச்சிகள் சார்பில்லா தனவாய் (பல நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதா வது ஒன்று, ஏனையவற்றின் எந்தச் சேர்மானத்தையும் சராது இருந்தால், அவை பரஸ்பரம் சார்பில்லாதவை என்று அழைக்கப்பெறுகின்றன. நிகழ்ச்சிகள் பரஸ்பரம் சார்பில்லாத னவாய் இருப்பதற்கு அவை இணை யாக அல்லது இரண்டு இரண்டாகச் சார்பில்லாதனவாய் இருந்தால் போதாது என்பதைக் குறிப்பிட வேண்டும். இணையாகச் சார்பில்லா தனவாய் இருந்தும் மொத்தத்தில் சார்பில்லாதனவாய் இல்லாமல் உள்ள சிக்கலான நிகழ்ச்சிகளின் எடுத் துக் காட்டுக்களை நாம் காண முடி யும். கணிதவியல் அறிஞர்கள் அடுத்து எதைத்தான் கண்டு பிடிக்க மாட்டார் கள்!) இருந்தால, நிரம்பவும் எளி மையாகிறது. இதில், முன்வரையறை நிகழ் தகவுகளைப் பெருக்கக் கூடாது (நிபந்தனை எதுவும் இல்லாத) நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை மட் டுமே நாம் பெருக்க வேண்டும்:

$$P\,(A_1 \text{ மற்றும் } A_2 \text{ மற்றம்} \ldots \text{ மயறும் } A_n = P\,(A_1,\,)P(A_2)\ldots P(A_n) \qquad 3.9$$

அதாவது, சார்பில்லாத நிகழ்ச்சி களின் சேர்மானத்தின் நிகழ் தகவு, அவற்றின் நிகழ் தகவுகளின் பெருக் குத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

கணக்கு 3.4. கைத்துப்பாக்கி வீரன் ஒருவன் குறி ஒன்றின் மீது நான்கு தடவை சுடுகின்றான். ஒவ் வொரு தடவையும் குறியைத்தாக்கு வதோ அல்லது நழுவ விடுவதோ முந் தைய தடவைகளின் விளைவைச் சார்ந்தில்லை (அதாவது, அவை பரஸ்பரம் சார்பில்லாதவை.). ஒவ் வொரு தடவையிலும் குறியைத் தாக் குவதற்கான நிகழ் தகவு 0.3. முதல் மூன்று தடவைகளில் குறியைத் தாக் காது நழுவ விடுவதற்கும் நான்கா வது தடவை குறியைத் தாக்குவதற் குமான நிகழ்தகவினைக் கண்டு பிடிக் கவும்.

தீர்வு: குறியினைத் தாக்குவதை "t" என்பதனாலும் அதை நழுவ விடு வதை ''—'' என்பதனாலும் குறிப்

பிடுவோம். சார்பில்லாத நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ் தகவு பெருக்கல் விதிப்படி,

$$P(---+) = 0.7\cdot 0.7\cdot 0.7\cdot 0.3 = 0.1029.$$

இப்போது, சற்று அதிகச் சிக்கலான கணக்கை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

கணக்கு **3. 5.** *3.4*—இல் இருப்பது போன்ற அதே பிபந்தனைகள். நான்கு தடவைகள் சுடும்போது அவற்றுள் இரண்டு (குறைவாகவும் இல்லை, அதிகமாகவும் இல்லை) குறியினைத் தாக்கும் என்னும் நிகழ்ச்சி A—இன் நிகழ் தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு: நிகழ்ச்சி பல வேறுபாடுகளில் நிகழலாம், எடுத்துக்காட்டாக $++--$, அல்லது $--++$,, என்றாவது. எல்லா வேறுபாடுகளையும் நாம் மறுபடியும் சொல்லாது, அவற்றின் எண்ணிக்கையை மட்டும் நாம் கணக்கிடுவோம். நான்கினுள் குறியினைத்தாக்கும் இரண்டு தடவைகளைத் தேர்ந்தேடுக்கக் கூடிய வழிக

ளின் எண்ணிக்கைக்கு அது சமமாகும்:

$$C(4,2) = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

அதாவது, நிகழ்ச்சி ஆறு வேறுபாடுகளில் நிகழ முடியும் என்பதை இது குறிக்கின்றது: A=(++—— அல்லது ——++ அல்லது————) (மொத்தத்தில் ஆறு வேறுபாடுகள்.) ஒவ்வொரு வேறுபாட்டின் நிகழ் தகவினையும் நாம் கண்டு பிடிக்கலாம். நிகழ் தகவுப் பெருக்கல் விதிப்படி,

$$P(++--) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.3^2 \cdot 0.7^2 = 0.0441,$$

$$P(--++) = 0.7^2 \cdot 0.3^2 = 0.0441$$

என்றவாறு, மேலும், எல்லா வேறுபாடுகளின் நிகழ் தகவுக்கும் சமமாயுள்ளன (எப்போதும் இப்படியே இருக்கும் என்று நீங்கள் எண்ணக் கூடாது!) நிகழ் தகவுக் கூட்டல் விதிப்படி அவற்றைக் கூட்டினால், நமக்குக் கிடைப்பது

$$P(A) = 0.0441 \cdot 6 = 0.2646 \approx 0.265.$$

இக்கணக்கினைக் கொண்டு, கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதில் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு பொது விதியினை நாம் உரைப்போம்: நிகழ்ச்சி ஒன்றின் நிகழ் தகவினை நாம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும் எனில், நாம் முதலில் நம்மையே ஒரு கேள்வி கேட்டுக் கொள்வோம்: இந்நிழ்ச்சியை எந்த வழியில் நாம் நிகழ்ச் செய்ய முடியும்? அதாவது, அதை, பரஸ்பரம் தனிப்பட்டிருக்கும் வேறுபாட்டு வடிவங்களின் ஒரு தொடராக அதை நாம் குறிப்பிட வேண்டும். பிறகு, ஒவ்வொரு வேறுபாட்டின் நிகழ் தகவினையும் நாம் கணக்கிட்டு, இந்நிகழ் தகவுகள் அனைத்தையும் நாம் கூட்ட வேண்டும்.

எனினும், அடுத்த கணக்கில் வேறுபாடுகளின் நிகழ் தகவுகள் சமமில்லாமல் இருக்கும்.

கணக்கு 3.9. ஒரே குறியின் மீது மூன்று கைத்துப்பாக்கி வீரர்கள் ஒவ்வொருவரும் ஒவ்வொரு தடவை சுடுகின்றனர். முதலாவது வீரன் குறியின் மீது தாக்குவதற்கான நிகழ்த

கவு $p_1 = 0.4$ இரண்டாவது வீரனுக்குள்ள நிகழ் தகவு $p_2 = 0.5$ மூன்றாவது வீரனுக்குள்ள நிகழ் தகவு $p_3 = 0.7$ இரண்டு வீரர்கள் குறியினைத் தாக்குவதற்கான நிகழ் தகவினைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு: நிகழ்ச்சி A (இருவர் குறியினைத் தாக்குவது) $C(3,2) - C(3,1) = 3$ வேறுபாடுகளாகப் பிரிகின்றது:

A = (+ + — அல்லது + — + அல்லது — + +)

$$P(++-) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.060,$$
$$P(+-+) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.140,$$
$$P(-++) = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.210.$$

இந்நிகழ்தகவுகளைக் கூட்டினால் நமக்குக் கிடைப்பது

$$P(A) = 0.410.$$

''சுடுதல்'' மற்றும் ''குறியினைத் தாக்குவது'' என்பவற்றைக் கொண்ட கணக்குகளின் ஏராளமான எண்ணிக்கையைக் கண்டு நீங்கள் ஒரு கால் வியப்படையக் கூடும். செந்நிலை மாதிரியினால் விவரிக்கப்பட முடியாத பரிசோதனைகளின் இந்த எடுத்துக்காட்டுகள், செந்நிலைமாதிரிக்

கான நாணயங்கள் மற்றும் பகடைகள் ஆகியவற்றுடன் கூடிய செந்நிலைக் கணக்குகளைப் போன்றே, நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் தவிர்க்க முடியாதவையும் மரபினைச் சார்ந்தனவும் ஆகும். எவ்வாறு பிந்தையவை நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டினைப் பயிலுவோர்களிடத்தில் சூதாட்டப் போக்கினை குறிப்பிடுவதில்லையோ, சுடுதல்களுடன் விளங்கும் இந்த எடுத்துக்காட்டுகள் நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டு அறிஞர்களிடம் கொலை வெறி இருப்பதைக் காட்டுவதில்லை! உண்மையில், இந்த எடுத்துக்காட்டுகள் நாம் மிகமிக எளிமையானவை. எனவே, சற்றுப் பெறுமையுடன் இருங்கள்; இன்னொரு கணக்கை எடுத்துக் கொள்வோம்.

கணக்கு 3. 7. *3.4.* கணக்கில் உள்ள அதே நிபந்தனைகள் (அதாவது, நான்கு தடவை சுடுதல்; ஒவ்வொரு தடவையும் குறியினைத் தாக்குவதற்கான நிகழ் தகவு *0.3*). கைத்துப்பாக்கி வீரன் குறியினை ஒரு முறையாவது தாக்குவதற்கான நிகழ்

தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு: குறைந்தபட்சம் ஒரு தாக்குதல் என்பதை என்று குறிப்பிட்டு நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ் தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும். முதலில் நாம் நம்மையே ஒரு கேள்வி கேட்டுக் கொள்வோம். இந்நிகழ்ச்சியை எந்த வழியில் நிகழ்ச் செய்ய முடியும்? இந்நிகழ்ச்சிக்குப் பல வேறுபாடுகள் இருப்பதை நாம் பார்ப்போம்:

C=(++++ அல்லது +++— அல்லது ...)·

இந்த வேறுபாடுகளின் நிகழ் தகவுகளைக் கண்டுபிடித்து அவற்றைக் கூட்ட முடியும் என்பது என்னவோ உண்மையே. ஆனால், அது அயர்வளிப்பதாகும்! குறியின் மீது தாக்காமல் இருப்பது என்னும் எதிரிடையான C—இன் மீது கவனம் செலுத்துவது மேலும் எளிதானதாகும்.

இந்நிகழ்ச்சிக்கு ஒரே ஒரு வேறுபாடு தான் உள்ளது:

$$\overline{C} = (----),$$

அதன் நிகழ் தகவு

$$P(\overline{C}) = 0.7^4 \approx 0.240$$

ஒன்றிலிருந்து அதைக் கழித்தால் நமக்குக் கிடைப்பது

$$P(C) \approx 1 - 0.240 = 0.760.$$

இக்கணக்கினைக் கொண்டு, மற்றுமொரு பொது விதியினை நாம் எடுத்துரைக்க முடியும்: **ஆய்விற்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட நிகழ்ச்சியை விட, அதற்கு எதிரிடையான நிகழ்ச்சி குறைந்த எண்ணிக்கையிலான வேறுபாடுகளாகப் பிரிந்து கொண்டால், நாம் எதிரிடையான நிகழ்ச்சியை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.**

எதிரிடையான நிகழ்ச்சியின் மீது கவனம் செலுத்துவது பயன் தரவல்லது என்று ஏறத்தாழ நிச்சயமாக நாம் முடிவிற்கு வருவதை அனுமதிக்கும் குறிப்புகளில் ஒன்று, கணக்கின் கூற்றில் ''குறைந்தபட்சம்'' என்னும் சொல் இருப்பதாகும்.

கணக்கு 3. 8. ஒருவருக்கு ஒருவர் அறிமுகமில்லாத ஆட்கள் ஏதாவதோர் இடத்தில் சந்திப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். அவர்களுள் குறைந்தபட்சம் இருவரின் பிறந்த நாள்

(அதாவது, ஒரே மாதம், ஒரே நாள்) ஒன்றாயிருப்பதற்கான நிகழ் தகவினைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு. ஆண்டின் எல்லா நாட்களுமே பிறந்த நாட்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு சமமாயுள்ளன என்பதாக வைத்துக் கொண்டு நாம் மேலே செல்வோம். (உண்மையில், அது அவ்வளவு திட்டமானதன்று, ஆனால், இதை ஒரு முதல் தோராயமாக நாம் பயன்படுத்த முடியும்.) நாம் அக்கறை கொண்டுள்ள குறைந்தபட்சம் இருவரின் பிறந்த நாட்கள் ஒன்றாயிருப்பது என்னும் நிகழ்ச்சி என்று குறிப்பிடுவோம்.

''குறைந்தபட்சம்'' (அல்லது ''இது மட்டுமாவது''—இதுவும் அதே மாதிரியானதேயாகும்) என்னும் சொற்கள் நமது கவனத்தை உடனே ஈர்க்க வேண்டும்: எதிரிடையான நிகழ்ச்சியை எடுத்துக்கொள்வது மேலும் நன்றாய் இராதா? உண்மையில், நிகழ்ச்சி நிரம்பவும் சிக்கலானது; மாபெரும் எண்ணிக்கை உள்ள வேறுபாடுகளாகப் பிரிவடை

வதாயுள்ளது; அம்மாபெரும் எண்ணிக்கையை ஆய்விற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் எண்ணமே நம்மை மருட்டுவதாயிருக்கின்றது. எல்லா ஆட்களும் வெவ்வேறு பிறந்த நாட்களை உடையவர்களாயிருக்கின்றனர் என்னும்—எதிரிடையான நிகழ்ச்சி C—ஐப் பொறுத்தவரை, அதற்கான வேறுபாடுகளின் எண்ணிக்கை அவ்வளவு அதிகமில்லை; அதன் நிகழ் தகவினை எளிதாகக் கணக்கிட முடியும். நிகழ்ச்சி C̄—ஐn நிகழ்ச்சிகளின் சேர்மானமாகக் குறிப்பிடுவோம். கூடியிருக்கும் ஆட்களிலிருந்து யாராவது ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுத்து, அவரை முன் வரையறையாக "முதல் ஆள்" என்று அழைப்போம். (இந்த ஆளுக்கு இது மெய்யான சாதகம் எதையும் அளிப்பதில்லை என்பதைக் குறிப்பிட வேண்டும்.) முதல் ஆள், ஆண்டின் எந்த நாளிலாவது நிறந்திருக்க முடியும்; இந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவு ஒன்று. தன்னிச்சையாக "இரண்டாவது ஆள்"ஐத் தேர்ந்தெடுக்கவும்—முதலாவது ஆளின் பிறந்த

நாளைத் தவிர வேறு எந்தத் தேதியிலும் அவர் பிறந்திருக்க முடியும். இந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவு 364/375 ''மூன்றாவது ஆள்''க்கு, பிறப்பதற்கு 363 நாட்கள் மட்டுமே இருக்கும்; இவ்வாறு மேன்மேலும் செல்லலாம். நிகழ் தகவுப் பெருக்கல் விதியினைப் பயன்படுத்தினால், நமக்குக் கிடைப்பது.

$$P(\overline{C}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365} \qquad (3.10)$$

(இந்த சூத்திரம் $n \leqslant 365$ என்பதற்கு மட்டுமே உண்மையாயிருக்கும்; $n > 365$ என்பதானால் $P(\overline{C}) = 0$ என்பது தெளிவு. எளிமையின் பொருட்டு, லிப் ஆண்டுகளின் எனப்படும் மிகு நாள் ஆண்டுகளையும் எவராவது ஒருவருடைய பிறந்த நாள் பிப்ரவரி 29 என்பதனையும் நாம் புறக்கணித்த விட்டிருக்கின்றோம்). இதிலிருந்து, $P(C) - 1 - P(\overline{C})$ என்பதைக்கண்டு பிடிப்பது எளிது.

இக்கணக்கின் விசித்திரமான விவரம் ஒன்றைக் கவனிக்கவும் மதிப்பு உயரும்போது (மிதமான மதிப்புக

ளுக்குக் கூட) நிகழ்ச்சி கிட்டத்தட்ட நிச்சயமானதாக ஆகிவிடுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, n=50 ஆக இருக்கும் போதே, (3.10) சூத்திரத்திலிருந்து கிடைப்பது

$$P(\overline{C}) \approx 0.03 \qquad P(C) \approx 0.97$$

அதாவது, (அதிகமான நம்பிக்கை 0.97 மதிப்புடன் கூடிய) நிகழ்ச்சி ஐச் செயலளவில் நிச்சயமான ஒன்றாகவே கருத முடியும்!

(நீங்கள் விரும்பினால்) மந்திரவாதி—குறிசெல்பவர் ஒருவரின் பங்கை நீங்கள் வகிப்பதற்கு இந்தச் சிறிய கணக்கீடு உங்களுக்கு உதவலாம். உங்களுக்கு முன்னமேயே பிறந்த நாட்கள் தெரியாக பல ஆட்கள் 50 அல்லது சற்றே அதிகமான ஆட்கள் (50—ஐ விட நிரம்பவும் அதிகமான மதிப்பு n உக்கு இருந்தால், பரிசோதனை பயனளிப்பதில்லை) ஏதோ ஓரிடத்தில் கூடுவதாக வைத்துக் கொள்ளவும். அவர்களிடையே பிறந்த நாட்கள் ஒன்றாக உடையவர்கள் இருப்பதாக வலியுறுத்திச் சொல்

லத் தொடங்குகிறீர்கள். அதைச் சரி பார்ப்பதற்கு, ஒரு காகிதத்தாளை எடுத்துக்கொண்டு, அதில் (ஜனவரி, பிப்ரவரி... என) 12 பத்திகளும் ஒவ்வொரு பத்தியிலும் 31 வரிசைகளும் (ஒரே மாதத்தில் இருக்கக் கூடிய நாட்களின் எண்ணிக்கை) வரைகிறீர்கள். ஆட்களிடம் அந்தத் தாளைக் கொடுத்து, ஒவ்வொருவரும் அவருடைய பிறந்த நாளுக்குச் சரியான கட்டத்தில் x குறியிடுமாறு சொல்லுகிறீர்கள். மேலும், ஒரு கட்டத்தில் இரண்டு x குறிகள் தோன்றியவுடன், தாளை உங்களிடம் திருப்பித் தருமாறு கூறுகிறீர்கள். ''அவ்வாறு தோன்றாவிடில்?'' என்று ஒருவர் கேட்கிறார். அப்போது நீங்கள் தன்னம்பிக்கையுடன் ''அவை தோன்றும்!'' என்று சொல்லுகிறீர்கள். உண்மையில், உங்களுக்கு ஒரு சின்ன சந்தேகம் ஏற்படுகிறது. நீங்கள் முன்னறிவித்தது நிச்சயமாக நிறைவேறும் என்பது முற்றிலும் நிச்சயமானதன்று என்பது உங்களுக்குத் தெரிந்திருக்கிறது. அது நிகழாது என்பதற்கு, எவ்

வளவு சிறியதாயிருந்தாலும், 0.03 அளவிற்கான நிகழ் தகவு இருக்கின்றது. இருந்தால் என்ன?... அத்தகைய அபாய நேர்வினை எதிர் கொள்ள நீங்கள் தயாராயிருக்க வேண்டும்.

இப்போது, மேலும் முக்கியமான விவரங்களை எடுத்துக்கொண்டு வகைப்பட்ட வேறுபாடுகளில் நடைமுறையில் அடிக்கடி எதிர்ப்படும் ஒரு மிக முக்கியமான பிரச்னை ஒன்றிற்குத் தீர்வு காண்போம்.

பிரச்னை 3. 1. தனிப்பட்ட முயற்சிகள் செய்யப்படுவதாக வைத்து கொள்வோம். ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் நிகழ்ச்சி A நிகழ்தகவுடன் நிகழ்கிறது. முயற்சிகளில் நிகழ்ச்சி குறைந்தபட்சம் ஒரு தடவையாவது நிகழ்வதற்கான நிகழ் தகவினைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு. n முயற்சிகளில் நிகழ்ச்சி ஒரு தடவையாவது நிகழ்வது என்பதை என்று குறிப்பிடவும்.

''குறைந்த பட்சம்'' என்னும் மந்திரச் சொற்கள் நம்மை எதிரிடையான நிகழ்ச்சிக்கு இட்டுச் சொல்லு

கின்றன. உண்மையில் நிகழ்ச்சி C (நிகழ்ச்சி A ஒரு தடவை கூட நிகழாமல் இருப்பது) C—ஐ விட நிரம்பவும் எளிமையானது; அதற்கு ஒரே ஒரு வேறுபாடு தான் உள்ளது:

$$\overline{C} = (\underbrace{— — — \dots —}_{})$$

n தடவைகள்.

சார்பில்லாத நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ் தகவுக் பெருக்கல் விதியினால் நமக்குக் கிடைப்பது $P(\overline{C}) = (1 - p)^n$ இதிலிருந்து கிடைப்பது

$$P(C) = 1 - (1 - p)^n \qquad (3.11)$$

பொதுச் சூத்திரமான *(3.11)*—ஐக் கவனிக்கவும்; நடை முறையில் முக்கியமான பல கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண அது பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கணக்கு 3.9 ''ரேடார்'' ஒன்றின் பார்வை வட்ட வீச்சு ஒன்றில் அண்ட வெளிப் பொருள் ஒன்றைக் கண்டு பிடிப்பதற்கான நிகழ் தகவு ஆக இருக்கட்டும் (தனிப்பட்ட வட்ட வீச்சுகளில் கண்டு பிடித்தல்கள் பரஸ்

பரம் சார்பில்லாதனவாகும்). 10 பார்வை வட்ட வீச்சுகளில் அப்பொருள்கள் கண்டு பிடிக்கப்படுவதற்கான நிகழ் தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு. *(3.11)* சூத்திரத்தின் படி,

$$P(C) = 1 - (1 - 0.1)^{10} = 1 - 0.9^{10} \approx$$
$$\approx 1 - 0.348 = 0.652.$$

கணக்கு 3. 10. ஓர் அமைப்பில் ஏழு தனிப்பகுதிகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பகுதியிலும், பிற பகுதிகளைச் சார்ந்திராத, குறைபாடு இருக்கலாம்; இதன் நிகழ் தகவு 0.05 ஒரே ஒரு பகுதி குறைபாடுள்ளதாயிருந்தாலும், இந்த அமைப்பு இயங்குவது சீர் குலைந்து விடும். இந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு. ''சீர்குலைவு'' என்னும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவினை *(3.11)* சூத்திரத்தினால் கணக்கிட முடியும்:

$$P(C) = 1 - (1 - 0.05)^{7} = 1 - 0.95^{7} \approx$$
$$\approx 1 - 0.695 = 0.305.$$

அழகு தான்! அமைப்பு இயங்காது சீர்குலைந்து விடுவதன் நிகழ் தகவு 0.305, அதாவது, 30 சதவீதத்

திற்கும் மேல்! நெருக்கடி நிலை உள்ளது என்பது சொல்லாமலே விளங்கும். ஒவ்வொரு பகுதியின் நம்பிக்கையான இயக்கத்தையும் (நன்கு அலுவல் புரியும் தன்மையின் நிகழ்தகவினை) நாம் விரைவாக மேம்படுத்த வேண்டும்!

பின்வரும் நிலைமையினைக் கவனிக்கவும்: ஒவ்வொரு பகுதியின் பழுது நிலையும் சற்றுக் முறைவான நிகழ்தகவான 0.05—ஐ உடையதாயுள்ளது. இவ்வெண்ணை நாம் கவனக் குறைவாகப் பார்த்தோமானால் அதைப் பொறுத்துக் கொண்டு ''பகுதியின் சேத''த்தினை நடை முறையில் அசாத்தியமான ஒரு நிகழ்ச்சியாகவே (நாணயங்களைச் சுண்டி எறிவதன் விளைவுகள் பற்றிய முன்னறிவுப்புக்களைக் கருதும் போது நாம் பல தடவைகள் செய்த மாதிரியே) குறிப்பிடுவோம். இப்போது மற்றொரு வகைக்குழப்பம்! முதலாவதாக, ஒரு பகுதி அன்று எழுபகுதிகள் உள்ளன; குறைந்தபட்சம் ஒரு பகுதியாவது

சீர்குலைவுற்று நின்று விடுவது குறைவான நிகழ் தகவுள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி அன்று. மேலும், நமது கவனமின்மையின் (சீர்குலைவின்!) விளைவுகள் வெற்றி கரமாயில்லாத ஒரு முன்னறிவிப்பினைப்போல் அவ்வளவு தீங்கற்றவை அல்ல.

சில சமயம் நிகழ் தகவு வழி வகைகளினால் செய்யப்படும் கணக்கீடுகள் ''சாமானிய அறிவிற்கு முரண்படுவது போல'' எதிர்பாராத விளைவுகளைத் தருகின்றன. நாகைச்சுவையுள்ள ஒரு கணக்கினால் இதை விளக்குவோம்.

கணக்கு 3. 12 இரு வேடுவர்கள்—ஸாம் மற்றும் ஜார்ஜ்—வேட்டைக்குச் சென்று, கரடி ஒன்றைக் கண்டனர்; இருவரும் ஒரே சமயத்தில் அதைச் சுட்டனர். கரடி கொல்லப்பட்டது. அதன் தோலின் மீது ஒரே ஒரு துளையே இருந்தது. வேடுவர்களுள் எவர் இதற்குக் காரணம் என்பது தெரியாது. ஆக இருப்பதற்கு அதிக வாய்ப்பு இருந்தது—அவர் சற்று வயதானவர் மற்றும் அதிக

அனுபவமுள்ளவர்; 0.8 நிகழ் தகவுடன் அவர் அந்த அளவுள்ள இலக்கின் மீது அந்த அளவுத் தொலைவிலிருந்து சுட்டார். சற்று இளையவரும் குறைவான அனுபவமுள்ளவருமான ஜார்ஜ் அதே இலக்கின் மீது 0.4 நிகழ் தகவுடன் சுட்டார். தோல் 50 ரூபிள்களுக்கு விற்கப்பட்டது. ஸாம் மற்றும் ஜார்ஜ் இருவர்களிடையே இப்பணத்தை நியாயமாக எவ்வாறு பகிர்ந்து கொள்வது?

தீர்வு. 50 ரூபிள்களை ஸாமிற்கும் ஜார்ஜுக்குமிடையே, நிகழ் தகவுகளான 0.8 மற்றும் 0.4 ஆகியவற்றின் விகித சமத்திற்கேற்ப, அதாவது, ஸாமிற்குப் பணத்தின் $^2/_3$ பகுதியையும் (33 ரூபிள்கள் மற்றும் 30 கொபெக்குகள்). எஞ்சியதை (16 ரூபிள்கள் மற்றும் 70 கோபெக்குகள்) ஜார்ஜுக்கும் பகிர்ந்தளிக்குமாறு நீங்கள் யோசனை கூறுவீர்கள். அவ்வாறு கூறினீர்கள் எனில், நீங்கள் கூறுவது தவறானதாயிருக்கும்!

இதை உங்களுக்கு உணர்த்துவதற்கு, கணக்கின் நிபழ்தனைகளைச்

சற்றே மாற்றுவோம். ஸாம் ஒரு தடவையிலேயே **நிச்சயமாகக்** கரடியின் மீது (நிகழ்தகவு மதிப்பு என்றுடன்) தாக்குவதாகவும், ஜார்ஜ் நிகழ் தகவு மதிப்பு 0.5 —உடன் மட்டுமே தாக்குவதாகவும் வைத்துக் கொள்ளவும். கரடியின் தோலின் மீது ஒரே ஒரு துளை மட்டுமே உள்ளது. அதைச் செய்தவர் (எனவே, தோலுக்கு உரியவர்)யார்? உண்மையில், ஸாம் தான்! ஏன் எனில், கணக்கின் நிபந்தனைகளின்படி அவர் குறி தவற முடியாது. அவ்வாறு எனில், பணத்தை 2:1 விகித சமப்படி, அதாவது, ஸாமிற்கு, $^2/_3$ பகுதி மட்டும், ஜார்ஜ்க்கு $^1/_3$ பகுதியும் என்று முன்போலவே பகிர்ந்தளிக்க நீங்கள் சொல்வது சரியா? உங்கள் வாதத்தில் ஏதோ தவறு இருப்பதாகத் தோன்றுகிறது. அது என்ன?

தோலின் மீது ஒரே ஒரு துளை மட்டுமே இருப்பதைக் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளாது, அதாவது, ஒரு வேடுவன் இலக்கின் மீது சரியாகச் சுட்டு, ஆனால், மற்றொருவன்

குறி தவறி விட்டதைக் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளாது, ஒரு தடவையில் இலக்கினைத் தாக்குவதன் நிகழ் தகவுகளுக்கு ஏற்ப நீங்கள் பணத்தைப் பகிர்ந்ததளித்து விட்டீர்கள். இந்தக் குறி தவறியது என்பது கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படவில்லை.

சரியான முறையில் கணக்கிற்கு நாம் தீர்வு காண்போம். தோலில் ஒரே துளை உள்ளது என்னும் நிகழ்ச்சி A ஐக் கருதவும். இந்நிகழ்ச்சியை எப்படி நிகழ்ச் செய்ய முடியும்? தெளிவாக, இரண்டு வழிகளில்:

A_1—ஸாம் குறி சரியாயிருந்தது; ஜார்ஜ் குறி தவறியது.

A_2—ஜார்ஜ் குறி சரியாயிருந்தது: ஸாம் குறி தவறியது.

இந்த வேறுபாடுகளின் நிகழ் தகவுகளை நிகழ் தகவுப் பெருக்கல் விதியினனால் கண்டு பிடிக்க முடியும்:

$$P(A_1) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48,$$
$$P(A_2) = 0.4 \cdot 0.2 = 0.08.$$

இந்த நிகழ் தகவு மதிப்புகளுக் கேற்பவே 50 ரூபிள்கள் பகிர்த்தளிக்

கப்பட வேண்டும். அப்போது ஸாமின் பங்கு

$$50 \cdot \frac{0.48}{0.48+0.08} = 42.8 \qquad \text{ரூபிள்கள்,}$$

ஜார்ஜுக்கோ

$$50 \cdot \frac{0.08}{0.48+0.08} = 7.2. \qquad \text{ரூபிள்கள்,}$$

கிடைக்கும்.

ஆனால், அத்தகைய பெரும் பங்கினைப் பெற்ற ஸாம், ஜார்ஜை விருந்திற்கு, வேடுவர்கள் அடிக்கடி அங்ஙனம் செய்வதைப் போல, அழைப்பார் என்பது நடக்கக் கூடியதே.

தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக் கள்.

இவ்வத்தியாயத்தில் தொடர்பின் மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் என்னும் புதிய மற்றும் மிகவும் முக்கி யமான கருத்தைப் பற்றி நீங்கள் தெரிந்து கொள்வீர்கள்.

முந்தைய அத்தியாயங்களின் உள் ளுறைகளைச் சுருக்கமாக நினைவு கூர்வோம். அத்தியாயம் 1—இல், ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவுனை, எளிமை மிக்க வழி வகையினால், அதாவது, சாதகமான விளைவுகளின் விகித சமத்தை நேரடியாகக் கணக்கிடுவத னால், கணக்கிடுவதற்குக் கற்றுக் கொண்டீர்கள். இந்த வழி வகையில்

தேர்ச்சி பெற்றவுடனேயே உங்களுக்கு ஏமாற்றம் ஏற்பட்டது. இந்த அணுகு முறையை எல்லா நிலைமைகளிலும் பயன்படுத்த முடியாது. என்பதும், செந்நிலை மாதிரியினால் பரிசோதனையை விவரிக்கக் கூடிய அதாவது, சாத்தியமான விளைவுகளின் சமச்சீர் அதற்கு இருக்கும் (சற்று அரிதாகவே உள்ள) கணக்குகளில் மட்டுமே அதைப் பயன்படுத்த முடிகின்றது என்பதும் தெரிந்தன. ஆனால், அடுத்த அத்தியாயத்தில், ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினை, அதன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினால் தோராயமாக எவ்வாறு கணக்கிடுவது என்பதனை நீங்கள் கற்றுக் கொண்டீர்கள்; பரிசோதனைக்கு வரையறைகள் எவையும் இதில் ஏற்படுத்தப்படவில்லை. இந்த வழிவகை சிறிதளவு பழக்கமாகியவுடன்; உங்களுக்கு இன்னொரு ஏமாற்றம் ஏற்பட்டது; நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டினில் இந்த வழிவகை பிரதானமானதன்று என்பது தெரிய வந்தது! அத்தியாயம் 3—இல் (நிகழ் தகவும் கோட்பாட்டின் அடிப்படை

விதிகள்) தலைப்பிலிருந்து தெரிவதைப் போல, அறிவியலின் இந்தத் துறையில் அடிப்படையாக உள்ள வழிவகைகளை நீங்கள் கடைசியில் தெரிந்து கொள்ள முயன்றீர்கள். ''கடைசியில்! ஆம், மையக்கருத்தை, சாரத்தை எப்படியோ நாம் அடைந்து விட்டோம். இனி மேல் நமக்கு ஏமாற்றங்கள் இரா என்று நினைக்கிறீர்கள். அந்தோ! மற்றுமோர் ஏமாற்றத்தை (இந்தத் தடவை கடைசியானது) சந்திக்க இருக்கிறீர்கள். உண்மையில், இது வரை நாம் கவனித்த நிகழ்ச்சிகளின் ஆய்வுச் சாதனம் நவீன நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டினில் பிரதானமானதன்று!

பொங்கும் சினத்துடன் ''பின், எந்தச் சாதனம் பிரதானமானது?'' என்று நீங்கள் கேட்கலாம், ''பின், ஏனய்யா பிரதானமான சாதனத்தைப்பற்றி நான் பயிலும்படி செய்யவில்லை?''

''சங்கடம் என்னவெனில், இவை அனைத்தையும் பற்றிய அறிவில்லாத நவீன சாதனத்தைப் பற்றிப் பயிலத்

தொடங்குவது கூட அசாத்தியமான ஒன்றாகும், என்று பெறுகையுடன் நாம் மறுமொழி அளிப்போம்.

''இந்தச் சாதனம் தான் என்ன?''

''தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் என்னும் சாதனம் தான் அது.''

இந்த அத்தியாயத்தில் நவீன நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டின் அடிப் படைக் கருத்துகள்—தொடர்பின் மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள், தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் வெவ்வேறு வகை கள் அவற்றை விவரிக்கும் மற்றும் கையாளும் வழிவகைகள் பயிலப்ப டும். தொடர்பின்மை வகை நிகழ்ச்சி களின் ஆய்வில் செய்தது போன்று தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களை விவரமாக நாம் கரு தப் போவதில்லை; ஏன் எனில், பொருத்தமான கணித வியல் சாத னம் ஒன்றைப் பயன்படுத்துவதற்கு நாம் முயன்றினால், அது நிரம்பவும் சிக்கலுள்ளதாக ஆகி, ஆரம்ப நிலை யிலுள்ள ஒரு மாணவனைத் தனி

மைப்படுத்தி விட முடியும். மாறாக, ஆரம்ப மாணவனின் ''தொடக்கப் படிகளை'' மேலும் அதிக அளவிண்கு எளிமையாக்கவே நாம் விரும்புகிறோம். ''இங்ஙனம், தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்பரு என்னும் கருத்தைப் பழக்கப்படுத்திக் கொள்வோம்.

ஒரு பரிசோதனையின் விளைவு ஒன்றின் காரணமாக ஓர் அளவுரு, முன்னதாகத்தெதரியாத பல்வேறு மதிப்புகளை ஏற்றுக்கொள்ளுமானால், அவ்வளவுரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு என்றழைக்கப்படுகறது.

நிகழ் தகவுக் கோட்பவைட்டில் எப்போதும் இருப்பதைப் போலவே, இவ்வரையறுப்பு தெளிவில்லாமலும், அளவுறுதியில்லாமலும், நிச்சயமில்லாமலும்... இருக்கின்றது. தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு என்னும் கருத்தினை புரிந்து கொள்வதற்கு, அதற்கு நீங்கள் பழக்கப்பட வேண்டும். இதற்காக தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்க

ளின் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கவனிக்கவும்.

1. இரண்டு நாணயங்களைச் சுண்டியெறிந்து செய்யப்படும், பரிசோதனை. இதன் விளைவாக, ''தலை''கள் தோன்றுவது ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஆகும். அதற்கான சாத்தியமான மதிப்புகள் 0.1 மற்றும் 2. அவற்றுள் எந்த மதிப்பை அது ஏற்கும் என்பது முன்னதாகத் தெரியாது.

2. மாணவன் ஒருவன் தேர்வு எழுதப் போகிறான். அவனுக்குக் கிடைக்கக் கூடிய மதிப்பெண் ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஆகும். அதற்குள்ள சாத்தியமான மதிப்புகள் 2, 3, 4 மற்றும் 5.

3. ஒரு குழுவில் 28 மாணவர்கள் உள்ளனர். ஏதாவது ஒரு நாளில் வகுப்பிற்கு வராத மாணவர்களின் எண் பதிவு செய்யப்படுகிறது. இது ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு அதன் சாத்தியமான மதிப்புகள் 0.1. ... 28.

நீங்கள் சொல்லலாம் 28 மாண

வர்களும் எல்லோரும் ஒரே சமயத்தில் நோயுற்று (வகுப்பிற்கு வராமல்) இருக்க முடியாது.

''ஆம், நடை முறையில் இது சாத்தியமே இல்லாத ஒரு நிகழ்ச்சி, ஆனால், தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் எல்லா மதிப்புகளும் ஒரே அளவிற்கு இருக்க வேண்டும் என்று யார் சொன்னர்கள்?''

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் உள்ள தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிபுருக்கள் யாவும், **தொடர்ச்சியற்ற தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள்** என்னும் வகையினைச் சேர்ந்தனவாகும். தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றின் சாத்தியமான மதிப்புகளின் ஒன்றனுக்கொன்றின் இடையே சிறிது இடைவெளி இருந்தால், அது தொடர்ச்சியற்றது என அழைக்கப்படுகிறது. அச்சில் இந்த மதிப்புகள் **தனிப்பட்ட புள்ளிகளால்** குறிப்பிடப்படுகின்றன.

தொடர்ச்சியான வகை என்பதனைச் சேர்ந்த தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் என்

பனவும் உள்ளன. இத்தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் மதிப்புகள் எண் அச்சின் மீது ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியைத் தொடர்ந்து நிரப்புகின்றன. இந்த இடைவெளியின் எல்லைகள் சில சமயம் பளிச் சென்று தெளிவாகவும் சில சமயம் தெளிவின்றியும் நிச்சயமில்லாமலும் இருக்கின்றன. தொடர்சியான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் பல எடுத்துக் காட்டுகளை இப்போது கவனிக்கலாம்.

1. கணிப்பான் (கணிப்பொறி) ஒன்றின் இரு செயலொழிவுகளுக்கு (பிழைகளுக்கு) இடையேயான இயங்கு நேரம். இந்தத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் மதிப்புகள் எண் அச்சின் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியை தொடர்ந்து நிரப்புகின்றன. இந்த இடைவெளியின் அடி எல்லை நிரம்பவும் நிச்சயமானது (0); மேல் எல்லை தெளிவில்லாமலும் நிச்சயமற்றதாயும் இருக்கின்றது; இதைப் பரிசோதனைகளின்

விளைவினால் மட்டுமே கண்டுபிடிக்க முடியும்.

2. சரக்கு வண்டித் தொடர் ஒன்று ஒரு நிலையத்தில் சரக்குகளை இறக்க வரும்போது அதன் எடை.

3. வெள்ளத்தின் போது எழுகின்ற நீரின் உயரம்.

4. ஒரு பண்டம் பகுப்பாய்வு முறைத் தராசு ஒன்றினால் நிறுக்கப் படும் போது தோன்றும் பிழை (முன்பு சொல்லப்பட்ட கணக்குகளினின்றும் தனித்திருக்கும் வகையில், இந்தத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு பாஸிட்டில், மதிப்புகள் இரண்டையுமே ஏற்க முடியும்.)

5. பண்ணை ஒன்றில் சோதனைக் காக எடுக்கப்படும் பாலின் அடர்த்தி.

6. தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் முன் எட்டாவது வகுப்பு மாணவன் ஒருவன் செலவழிக்கும் நேரம்.

நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் பயன்படுத்தப்படும் கருத்தில் ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவைப் பற்றிக் குறிப்பிடுகையில், இந்தத் தொடர்பின்மை வகை

மாறியல் மதிப்புரு இந்த அல்லது அந்த மதிப்பை ஏற்கும் பரிசோதனையை வரையறை செய்ய வேண்டியது அவசியமாகும். எடுத்துக்காட்டாக, தொடர்ச்சியான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் பற்றிய முதலாவது எடுத்துக்காட்டில், நாம் பேசுவது எந்த வகைக் கணிப்பான், அதன் வயது மற்றும் இயங்கும் நிபந்தனைகள் யாவை என்பவற்றைக் குறிப்பிட வேண்டும். நான்காவது எடுத்துக்காட்டில் நிறுப்பதற்காக நாம் எந்த வகையான தராசைப் பயன்படுத்துகின்றோம், எந்தச் சிறு எடைகள் அடுக்கினை உபயோகிக்கின்றோம் என்பதை நாம் விளக்க வேண்டும். பரிசோதனை நிலைகளைத் தெளிவாக்குவதன் அவசியத்தை மனத்தில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டும். சுருக்கிக் கூறுவதற்காக, நாம் எல்லா எடுத்துக் காட்டுகளிலும் விவரங்களை தரப் போவதில்லை என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

பின்வரும் நிலைமையினைக் கவனிக்கவும், உண்மையில், தொடர்ச்சி

யான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் என நாம் அழைப்பவையாவற்றையும் (நிமிஷங்கள், ஸெண்டிமீட்டர்கள், டன்கள் முதலியவற்றைப் போன்ற) குறிப்பிட்ட சில அலகுகளில் அளக்க முடியும்; எனவே, இந்தக் கருத்தில், திட்டமாகச் சொன்னால், அவை தொடர்ச்சியற்றவையே. எடுத்துக்காட்டாக, ''ஒரு மனிதனின் உயரம்'' என்னும் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவை 1 ஸெ. மீக்கும் அதிகமான நுட்பத்துடன் அளப்பது பொருத்தமற்றதாகும்; ஆகவே, இந்தத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவிற்கு 1. ஸெ.மீ. இடைவெளியினால் பிரிக்கப்பட்ட மதிப்புகள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன. ஆனால், இம்மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை மிகவும் பெரியது அல்லது ஏராளமானது; எண் அச்சின் மீது மிகவும் ''அடர்த்தியாக'' அவை அமைந்துள்ளன. எனவே, இவ்வெடுத்துக்காட்டில் இந்தத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவை தொடர்ச்சியான ஒன்

றாகவே கருதுவது நிரம்ப வசதியாக இருக்கும்.

இங்கிருந்து, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களை இலத்தீனியக் கொட்டை எழுத்துக்களினாலும், அவற்றின் சாத்தியமான மதிப்புகளைப் பொருத்தமான சிறிய எழுத்துக்களினாலும் நாம் குறிப்பிடுவோம். (எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு, அதன் சாத்தியமான மதிப்புகள் x_2, x_1...). தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவை நாம் சில சமயம் என்று சுருக்கி எழுதுவோம்.

ஆகவே, RV X—உம் அதன் சாத்தியமான மதிப்புகளில் சிலவும் இருப்பதாக வைத்துக்கொள்வேம். இவ்வெல்லா மதிப்புகளுமே இருப்பதற்குச் சமவாய்ப்புக் கிடையாது. அவற்றுள் சில அதிக நிகழ் தகவுடையவை; வேறு சிலவற்றிற்குக் குறைவான நிகழ் தகவு இருக்கும். இந்த மாறியல் மதிப்புருவின் மதிப்புகளிடை உள்ள நிகழ் தகவுகளின் பங்கீட்டினை விவரிக்கும் எந்தச் சார்பலனையும்

பங்கீட்டுச் சார்பலன் *(விதி)* என்று அழைப்போம். நாம் பங்கீட்டின் எல்லா வகைகளையும் உங்களுக்குக் காண்பிக்கப் போவதில்லை; மிகவும் எளிமையாளவற்றையே காட்டு வோம்.

தொடர்ச்சியற்ற தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றின் பங்கீட்டினை **பங்கீட்டுத் தொடர்** எனச் சொல்லப்படுவதன் வடிவில் குறிப்பிட முடியும். இரண்டு வரிசைகளுடன் கூடிய அட்டவணைக்குஅளிக்கப்பட்ட பெயர் இது; மேல் வரிசை தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் சாத்தியமான மதிப்புகள் அனைத்தையும் எடுத்துக்காட்டுகின்றது: x_1, $x_2 \ldots$ x_n; கீழ் வரிசை அவற்றுக்குப் பொருத்தமான நிகழ்தகவுகளைக் குறிப்பிடுகின்றது; P_1, $P_2 \ldots$ P_n;

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

P_i நிகழ்தகவு ஒவ்வொன்றும், RVX, என்றும் மதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவின்றி வேறு ஒன்றுமில்லை:

$$P_1 = P(X = x_i) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

நிகழ் தகவுகள் அனைத்தின் கூட்டுத்தொகை p_i ஒன்று என்பது தெளிவு.

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$$

இந்த ஒன்று RV—இன் மதிப்புகளின் மீது எவ்வாறோ பகிர்ந்தளிக்கப்பட்டுள்ளது; எனவே தான், பங்கீடு என்ற சொல்.

கணக்கு 4.1. இலக்கு ஒன்றின் மீது மூன்று தனிப்பட்ட தாக்குதல்கள் நிகழ்த்தப்படுகின்றன; ஒவ்வொரு தடவையும் ஒரு சுடுதலின் நிகழ்தகவு P=0.4. தொடர்ச்சியற்ற RVX என்பது தாக்குதல்களின் எண்ணிக்கை. அதற்கான பங்கீட்டுத் தொடரை நிருபிக்கவும்.

தீர்வு. மேல் வரிசையில், RVX—இன் சாத்தியமான மதிப்புகள் எல்லாவற்றையும், 0.1, 2, மற்றும் 3 என்பவற்றையும், கீழ் வாசையில்,

P_0, P_1, P_2, மற்றும் P_3 என்பவற்றில் நாம் குறிப்பிடும் முறையான நிகழ்தகவுகளையும் எழுதவும். அவற்றை எவ்வாறு கணக்கிடுவது என்பது நமக்கு ஏற்கெனவேயே தெரியும் (அத்தியாயம் 3—ஐக் காண்க). எனவே,

$$p_0 = P(---) = 0.6^3 = 0.216$$

$$p_1 = P(+-- \text{ அல்லது } --+ \text{ அல்லது } -+-) = 3.06^2 \cdot 0.4 = 0.432,$$

$$p_2 = P(++- \text{ அல்லது } +-+ \text{ அல்லது } -++) = 3 \cdot 0.4^2 - 0.6 = 0.288$$

$$p_3 = P(+++) = 0.4^3 = 0.064.$$

இந்நிகழ் தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை ஒன்றுக்குச் சமமாயுள்ளதா என்பதை நாம் சரிபார்க்கலாம். உண்மையிலேயே அப்படித் தான் இருக்கிறது; எனவே, அது சரியானதாகும். RVX—இன் பங்கீட்டுத் தொடரின் வடிவம் பின்வருமாறு:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.216	0.432	0.288	0.064

கணக்கு 4.2. விளையாட்டு வீரர்

ஒருவர், ஒரு பந்தை ஒரு கூடையினுள் எறிவதற்குப் பல முயற்சிகள் செய்கின்றார். ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் (பிற முயற்சிகளின் மீது சார்பில்லது) P என்னும் நிகழ் தகவுடன் வெற்றி கிடைக்கிறது. பந்து கூடையினுள் சேர்ந்தவுடன் அலுவல் நிறுத்தப்படுகின்றது.

PVX—இன் பங்கீட்டுத் தொடரை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு. RVX—இன் சாத்தியமான மதிப்புகள் $x_1=1$, $x_2=2\ldots$ $x_k=k$ என்று கோட்பாட்டளவில் முடிவின்றிச் செல்லுகின்றன. இந்த மதிப்புகள் எல்லாவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்: விளையாட்டு வீரர் முதல் முயற்சியில் பந்தைக் கூடைக்குள் எறிவதன் நிகழ் தகவு P_1: அது Pக்கு சமம் என்பது தெளிவு, $p=p_1$ இரண்டு முயற்சிகள் செய்யப்படும் பதன் நிகழ் தகவான P_2—ஐ நாம் கண்டு பிடிப்போம்; இதற்கு, இரண்டு நிகழ்ச்சிகளின் சேர்மானம் நிகழ வேண்டும்; *(1)* முதல் முயற்சியில் விளையாட்டு வீரர் கூடையினுள்

பந்து சேருவதை நழுவ விட்டு விட்டார்; (2) இரண்டாவது முயற்சியில் அதைக் கூடையினுள் எறிந்து விட்டார். நிகழ் தகவான $p_2 = (1 - p) p$ அங்ஙனமே, $p_3 = (1 - p)^2 n$ (முதல் இரண்டு முயற்சிகள் வெற்றிகரமாயில்லை; மூன்றாவது முயற்சி அதிர்ஷ்டமுடையதாயிருந்தது); பொதுவாக $p_i = (1 - p)^{i-1} p$ RVX—இன் பங்கீட்டுத் தொடரின் வடிவம் பின்வருமாறு:

χ_i	1	2	3	$\ldots i$	$\ldots$
p_i	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2 n$	$\ldots (1-p)_p^{i-1}$	$\ldots$

Pi நிகழ் தகவுகள் யாவும், (1 — p) என்னும் பொது விகிதத்துடன் கூட பெருக்கல் விருத்தித் தொடராக அமைந்திருப்பதைக் கவனிக்க வேண்டும்; இக்காரணத்தினால், அத்தகைய நிகழ் தகவுப்பங்கீடு பெருக்கல் விருத்திப் பங்கீடு என்று அழைக்கப்படுகின்றது.

இப்போது, தொடர்ச்சியான ஒரு RV—இன் நிகழ் தகவுப் பங்கீட்டினை

எப்படி நிர்ணயிப்பது என்பதைக் கவனிப்போம். X—அச்சின் மீது குறிப்பிட்ட ஓர் இடைவெளியினைத் தொடர்ந்து நிரப்பும் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றிற்கு நாம் பங்கீட்டு தொடர் ஒன்றை நிரூபிக்க முடியாது.

''ஏன் முடியாது?'' என்று நீங்கள் கேட்கலாம். இதோ விடை. தொடரின் மேல் வரிசையினைக் கூட நாம் எழுத முடியாது; அதாவது, RV—இன் சாத்தியமான மதிப்புகள் அனைத்தையும் ஒன்றன் பின் ஒன்றாகக் குறிக்க முடியாது. உண்மையில், எந்த ஜோடி மதிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டாலும், அவற்றுக்கிடையே ஏதோ சில மதிப்புகளை எப்போதும் நாம் காண முடியும். (''தொகுதித் தேற்றம்'' தெரிந்திருப்பவர்களுக்கு, இம்மதிப்புக்ளின் எண்ணிக்கை **எண்ண முடியாதது** என்பதைச் சொல்ல வேண்டும்). மேலும், நாம் இன்னுமோர் இடர்ப்பாட்டினையும் எதிர் கொள்ள வேண்டும்: தொடர்ச்சியான RV ஒன்றின் ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட மதிப்

பிற்கும் குறிப்பிட்டதொரு நிகழ் தக வினை நாம் வழங்க முயன்றால், இந்த நிகழ் தகவு... பூஜ்யத்திற்குச் சமமா கும். என்பது தெரிய வரும்! ஆம், திட்டமாகப் பூஜ்யம், பழுத்துப்பிழை எதுவுமில்லை; அதை நீங்களே பார்க் கப் போகிறீர்கள்.

கூழாங்கற்கள் நிறைந்த கடற் கரை ஒன்றின் மீது நாம் இருப்பதாகக் கற்பனை செய்து கொள்ளவும். தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றில் x தனிப்பட்ட கூழாங்கல் ஒன்றின் எடையில் நமக்கு அக்கறை ஏற்படுகின்றது.

கற்களை நிறுப்போம். முதலில், திட்ப நுட்ப அளவு 1g க்குள் இருக் கும் வகையில் நாம் தொடங்குவோம் ஒரு கல்லின் எடை 1g திட்ப நுட்ப அளவுக்குள் 30g என்ற அளவில் இருக் கும் போது, அது 30 என்று வைத் துக்கொள்வோம். 30g எடையினுக் ஏதோ ஓர் விரைவு எண் நமக்குக் கிடைக்கும்—இப்போது அது எதற் குச் சமமாயிருக்கும் என்பது நமக்குத் தெரியாது; அது முக்கியமில்லை.

இப்போது, திட்ப நுட்பத்தின் அளவினை உயர்த்தி, 0.1gக்குள் அது இருக்கும் வகையில் அதாவது, ஒரு கல்லின் எடை 0.1g திட்ப நுட்ப அளவுக்குள் 30g என்றால் கல்லின் எடையை 30g ஆக வைத்துக் கொள்வோம். கற்களை நிறுப்போம். அப்போது, முதல், தோராயமான நிறுவையின் போது 30g எடையுள்ளவை என நாம் வைத்துக் கொண்ட சில கற்கள் தவிர்க்கப்பட்டுவிடும். X = 30g என்னும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வு விரைவு எண்ணின் மதிப்புக் குறையும். எத்தனை மடங்குகள் தோராயமாகப் பத்து மடங்குகள்.

இப்போது, திட்ப நுட்பத்தின் அளவினை மேலும் உயர்த்தி, 1மி.கி. திட்ப நுட்ப அளவுக்குள் இருக்கும் வகையில் கற்களை நிறுப்போம்! 30g எடை தோன்றுவதன் நிகழ்வு விரைவு மேலும் 100 மடங்குகள் குறைந்துவிடும்.

பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக ஆக (கடற் கரையின் மீது போதிய கற்கள் உள்ளன—

எனவே, நிறுப்பதற்குப் போதிய மாதிரிக்கற்கள் கிடைக்கும், கவலை வேண்டாம்!) நிகழ் தகவுடன் நெருங்கிய தொடர்பு கொண்ட அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அதன் மதிப்பை நெருங்கத் தொடங்கும். எனவே, ஒரு கல்லின் எடை, சற்றுக் கூடுதலாகவும் இல்லை, குறைவாகவும் இல்லை, தட்டமாக 30g இருக்கிறது என்னும் நிகழ்ச்சிக்கு என்ன நிகழ் தகவு மதிப்பு அளிக்கப்பட வேண்டும் தெளிவாக, பூஜ்யம் நிகழ் தகவே— ஒன்றும் வெய்வதற்கில்லை!

ஆச்சிரியமாயிருக்கிறது உங்களுக்கு கோபமாகக் கூட இருக்கலாம். பூஜ்யம் நிகழ் தகவு என்பது சாத்தியமேயில்லாத நிகழ்ச்சிகளுக்கு உரியதாகும். ஆனால், தொடர்ச்சியான RVX, x என்னும் குறிப்பிட்டதொரு மதிப்பை ஏற்கின்றது, என்னும் நிகழ்ச்சி சாத்தியமானதே! பின், எப்படி அதன் நிகழ் தகவு பூஜ்யம் என்று இருக்க முடியும்?

மீண்டும் நினைவுபடுத்திக் கொள்வோம். **சாத்தியமேயில்லாத**

நிகழ்ச்சி ஒன்றின் நிகழ் தகவு பூஜ்யம் என நாம் தீர்மானித்தது உண்மையே. ஆனால், பூஜ்யம் நிகழ் தகவுடைய எந்த நிகழ்ச்சியுமே சாத்தியமேயில்லாதது என்று கூறினோமோ? இல்லவே இல்லை! நிகழ் தகவுகள் பூஜ்யமாயிருக்கக் கூடிய சாத்தியமான நிகழ்ச்சிகளை நாம் பார்க்கிறோம்.

அவசரப்படாதீர்கள், சற்றுச் சிந்திப்போம். நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டினை ஒரு கணம் மறந்து விட்டு, பரப்பளவுள்ள சம தள வடிவம் ஒன்றைக் கற்பனை செய்து கொள்ளவும். இந்த வடிவத்திற்குள் ஏதோ ஒரு புள்ளியினை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள். இந்தப் புள்ளியின் பரப்பளவு என்ன? தெளிவாக, பூஜ்யம். இந்த வடிவம், ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யம் பரப்பளவு உடைய புள்ளிகளால் ஆகியுள்ளது என்பதில் ஐயமில்லை; முழு வடிவத்தின் பரப்பளவோ பூஜ்யமில்லாத மதிப்புடைதயாக உள்ளது என்பதிலும் சந்தேகமில்லை. இந்த ''முரண்பாடு'' உங்களுக்கு வியப்பளிப்பதில்லை—நீங்கள் அதற்குப்

பழக்கப்பட்டு விடுகிறீர்கள், அவ்வளவு தான். அதே மாதிரியே, தொடர்ச்சியான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவைப் பொறுத்தவரை, ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட புள்ளியை அடைவதன் நிகழ் தகவு திட்டமாகப் பூஜ்யமே என்னும் விவரத்திற்கும் நீங்கள் பழக்கப்பட வேண்டும். (ஒரு சிறப்பான, கலவை வகை என்று சொல்லப்படும் வகையினைச் சேர்ந்த தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களும் உள்ளன என்பதை நாம் கூறியாக வேண்டும். பூஜ்யம் நிகழ் தகவுகளுள்ள சாத்தியமான மதிப்புகளுடைய தொடர்ச்சியான இடை வெளி ஒன்றுடன் கூட, பூஜ்யமில்லாத நிகழ் தகவுகளுடன் கூடிய தனிப்பட்ட சிறப்பான மதிப்புகளையும் அவை பெற்றிருக்கின்றன. இச்சிக்கலான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களை நாம் கவனிக்க போவதில்லை; ஆனால், அவை இருக்கின்றன என்பதை நீங்கள் அறிய வேண்டும்.)

''அப்போது, தொடர்ச்சியான

தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றுக்கு **நிகழ்தகவுப்பங்கீடு** என்பதைப் பற்றி நாம் எப்படிப் பேச முடியும்?'' என்று நீங்கள் கேட்கலாம். ''அதன் மதிப்புகளுள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரே பூஜ்யம் நிகழ்தகவு தான் இருக்கிறது, இல்லையா?'

நீங்கள் கூறுவது முற்றிலும் சரியே. தொடர்ச்சியான ஒன்றுக்கு அதன் **தனிப்பட்ட மதிப்புகள்** பற்றிய நிகழ் தகவுப் பங்கீடு பற்றிப் பேசுவதில் பொருள் எதுவும் இல்லை. எனினும், அத்தகைய தொடர்ச்சியான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவிற்குப் பங்கீடு உள்ளது எடுத்துக்காட்டாக, மனிதனின் உயரத்தின் அளவு 210 செ.மீ.இருப்பதை விட 170 செ. மீ இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு அதிகம் என்பதில் இரண்டுமே சாத்தியம் என்றாலும் கூட—ஐயப்பாடு எதுவும் கிடையாது.

இங்கு, இன்னொரு, மேலும் முக்கியமான கருத்தை நாம் அறிமுகம் செய்ய வேண்டும்—அதாவது, **நிகழ்தகவு அடர்த்தி.**

இயற்றியிலிருந்து ''அடர்த்தி'' என்னும் கருத்து பழக்கமானதே ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொருளின் அடர்த்தி ஒரு கன பரிமாண அலகிற்குள்ள அதன் நிறையாகும். அந்தப் பொருள் ஒரே தன்மையுடையதாக இல்லாமல் இருந்தால்? அப்போது அதன் ஸ்தல அடர்த்தியை நாம் கருத வேண்டியிருக்கும். நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் ஸ்தல அடர்த்தியினையும் (அதாவது, x புள்ளியில் ஓரளகு நளத்திற்கான நிகழ் தகவினையும்) பற்றி நாம் ஆராய்வோம்.

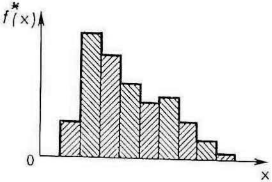
x என்னும் ஒரு தொடர்ச்சியான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் நிகழ் தகவு, புள்ளியின் அருகாமையிலான ஒரு சிறிய இடை வெளிக்குள் RVX—ஐக் கொண்டு வருவதன் நிகழ் தகவிற்கும். இந்த இடைவெளியின் நீளம் பூஜ்யத்தின் மதிப்பை நெருங்க முற்படும் போது அதற்குள்ள் மதிப்பிற்கும் இருக்கும் தகவின் வரம்பு ஆகும்.

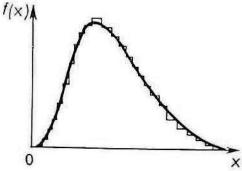
நிகழ் தகவு அடர்த்தியை, அதற்கு நெருங்கியதொடர்புள்ளதான அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு என்பதிலிருந்து எளி

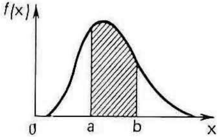
தாகக் காண முடியும். தொடர்ச்சியான RVX ஒன்றை (எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு மனிதனின் உயரத்தையே அல்லது, கடற்கரையின் மீதுள்ள ஒரு கல்லின் எடையையோ) எடுத்துக் கொள்ளவும். முதன் முதலில், இந்தத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு சம்பந்தமாக அதிக அளவுப் பரிசோதனைகளை (ஒவ்வொரு பரிசோதனையிலும் அதற்குக் குறிப்பிட்டதொரு மதிப்பு கிடைக்கும் வகையில்) செய்வோம். (எடுத்துக்காட்டாக, மக்கள் தொகுதி ஒன்றிலுள்ள ஆட்களின் உயரத்தை அளப்போம், அல்லது, பல கற்களை நிறுப்போம்.) நமது தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவிற்கான நிகழ் தகவுப் பங்கீட்டில் நமது அக்கறை உள்ளது. இன் மதிப்புகளின் முழு வரிசையினையும் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளாக (அல்லது அவர்கள் சொல்லுவது போல், வகைக்கூறுகளாக), எடுத்துக்காட்டாக, 150–155 செ.மீ., 155–160 செ.மீ., 160 165 செ.மீ.,...190–195 செ.மீ. 195–

200 செ.மீ. என்று பகுப்போம். RVX—இன் எத்தனை மதிப்புகள் ஒவ்வொரு வகைக் கூறிலும் (X—இன் ஏதாவதொரு மதிப்பு இரண்டு இடைவெளிகளுக்கிடையேயான எல்லை அளவுக்குச் சமமானால், ஒவ்வோர் இடைவெளிக்கும் அதில் பாதி கொடுக்கப்படுகிறது.) வைக்கப்படுகின்றன என்பதைக் கணக்கிட்டு, செய்யப்பட்ட பரிசோதனைகளின் மொத்த எண்ணிக்கையினால் வகுக்கவும். நமக்குக் கிடைப்பது ''வகைக் கூறின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு'' வகைக் கூறுகள் எல்லாவற்றின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுகளின் கூட்டுத் தொகை ஒன்றுக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு.) இப்போது, ஒவ்வோர் இடைவெளிக்குமான அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அடர்த்தியைக் கணக்கிடவும்; இதற்கு, அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினை இடை வெளியின் நீளத்தினால் வகுக்கவும் (பொதுவாக, இடை வெளிகளின் நீங்கள் வெவ்வேறாக இருக்க முடியும்).

போதிய அளவிற்குப் பெரியதான







விவரங்கள் அடங்கிய, கோப்பு ஒன்று (பல நூறுகள் அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு இருந்தாலும் நல்லதே) இருந்தால், நமது RV-க்கு அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அடர்த்தியை வரைந்தால், அதன் நிகழ் தகவு அடர்த்தியைப் பற்றித் தெளிவாக நமக்குத் தெரிய வரும். அந்தப் புள்ளியியல் விவரங்களை ஆராயும் போது, ''ஹிஸ்டோக்ராம்'' (படம் 2) என்னும் வரைப்பட வகையில் வரைவது நிரம்பவும் வசதி

யானதாயிருக்கும். ''ஹிஸ்டோக்ராம்'' பின் வருமாறு வரையப்படுகின்றது. ஒவ்வோர் இடைவெளியின் மீதும் (அடித்தளத்தின் மீது போல), இடைவெளி அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்குச் சமமான பரப்பளவுடைய மீது போல), இடைவெளி அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்குச் சமமான பரப்பளவுடைய செவ்வகம் ஒன்றை நாம் வரைகின்றோம். (எனவே, அதன் உயரம் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு அடர்த்திக்குச் சமமாயுள்ளது)— ''ஹிஸ்டோக்ராம்'' எல்லைக்குட்பட்ட பரப்பளவின் மதிப்பு ஒன்றுக்குச் சமம் என்பது தெளிவு. பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கையை (N) அதிகரிக்கும்போது, இடைவெளிகள் மேலும் மேலும் குட்டையாக ஆகி, ''ஹிஸ்டோக்ரா'' மின் படி வடிவம் மேலும் மேலும் முனைகிளற்று இழை விசையாகி, **பங்கீடு வளைகோடு** (படம் 3) என்றழைக்கப்படும் முனைகளற்ற ஒரு வளைகோட்டாக ஆக முற்படுகிறது.

y—அச்சின் மீதுள்ளது அடுக்கு

நிகழ்வு விரைவு அடர்த்தியாயிராது, நிகழ் தகவு அடர்த்தியாயிருக்கும். தெளிவாக, பங்கீடு வகைகோட்டின் எல்லைக்குள் இருக்கும் பரப்பளவு, அதன் ''ஹவினரான'' ஹஸ்டோக்ராம் போன்றே ஒன்றுக்குச் சமமாயிருக்கும். RVX (a, b) இடைவெளியினுள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு இந்த இடை வெளியின் மீது அமர்ந்திருக்கும் பரப்பளவிற்குச் சமமாயிருக்கும் (படம் 4) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பலனை f(x) என்று குறிப்பிட்டால், RVX(a,b) இடை வெளியில் அமைவதற்கான நிகழ் தகவு பின்வரும் வரையுட்படு தொகையினால் குறிக்கப்படும்:

$$P(a,\ b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (4.1)$$

இவ்வாறாக, காலம் மற்றும் உழைப்பு இரண்டையும் நாம் செலவழிக்கத் தயாராயிருந்தால், நாம் அக்கறை கொண்டிருக்கும் நிகழ் தகவு அடர்த்தி சார்பலனை விதிக் கட்டுப்பாடில்லாததொரு 'திட்ப நுட்

பத்துடன் பரிசோதனை விவரங்களி லிருந்து நிர்ணயிக்க முடியும். ஆனால் அவ்வளவு முயற்சி செய்து அதைச் செய்வது பயனுள்ளதா? நிகழ்தகவு அடர்த்தி f(x)—இன் தனிப்பட்ட திட்ப நுட்பமான மதிப்பு நமக்கு உண்மை யிலேயே தேவையா? இல்லை, நமக் குத் தேவை இல்லை; RVX—இன் பங் கீடு பற்றிய தோராயமான மதிப்பு இருந்தாலோ போதுமானது (நிகழ் தகவுக் கணக்கீடுகள் யாவும் இயல் பிலேயே தோராயமான மதிப்பீடு களே ஆகும்). RVX—உக்கான பங்கீடு விதியினைத் தோராயமாகத் தெரிந்து கொள்வதற்கு ஏராளமான எண்ணிக் கையில் பரிசோதனைகளை நாம் செய்ய வேண்டியதில்லை; 300 அல் லது 400 பரிசோதனைகளையே அதற் குக் குறைவாகவே கூட பயன்படுத் தினால் போதும். கிடைத்த பரிசோ தனை விவரங்களுக்கேற்ப ''ஹிஸ் டோக்ராம்'' வரைந்து, ஏதாவது இழைவிசைவான வளைகோட்டி னைப் பயன்படுத்தி, அதைச் சமன் படுத்தலாம் (ஓர் அலகுப் பரப்ப

ளவை எல்லைக்குட்படுத்தும் வளை கோடாக அது இருக்க வேண்டும்.) இந்நிபந்தனைக்கிணங்கிய மிகப் பல வளைகோடுகள் நிகழ் தகவுக் கோட் பாட்டில் உள்ளன. ஏனையவற்றைப் பொறுத்தவரையில் சிலவற்றிற்குக் குறிப்பிட்ட வசதிகள் உள்ளன; ஏன் எனில், அவற்றின் வரையுட்படு தொகையினை (4.1) எளிதில் கணக் கிட முடியும், அல்லது, இந்த வரை யுட்படு தொகையின் மதிப்புகளுக்கு அட்டவணைகள் இருக்கின்றன. வேறு சிலவற்றில் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்று தோன்றுவதற்கான நிபந்தனைகள், கோட்பாட்டியல் நோக்கிலிருந்து குறிப்பிட்ட ஒரு வகைப் பங்கீட்டினை சுட்டிக் காட்டுவனவாயுள்ளன. அத் தகைய விவரத்தைப் பற்றி நாம் கவ னிக்கப்போவதில்லை—அது ஒரு சிறப்பான ஆய்வு. எனினும், பிரதான முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தொடர்பின் மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் பங்கீட்டினைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு, **நேரடியான** வழிகள் அல்லாது, பரிசோ

தனையிலிருந்து நேரிடையாக இல்லாமல், முதல் வகைத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களுக்குச் சம்பந்தமுள்ள பிற வகைத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் பற்றிக் கிடைத்துள்ள விவரங்களிலிருந்து கணக்கிடுவதைச் சாத்தியமாக்கும் **மறைமுக** வழிகள் உள்ளன.

இந்த மறை முக வழிகள் கிடைப்பதில், தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் எண்ணியல் சிறப்பியல்புகள் என்று அழைக்கப்படுபவை ஒரு முக்கியப் பங்கை வகிக்கின்றன.

எண்ணியல் சிறப்பியல்புகள் என்பவை, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் சில இயல்புகளையும், தொடர்பின்மை வகையான மாறுதல் முன்னும் பின்னும் அருகாமையில் நிகழும் சராசரி மதிப்பு, இந்த மாறுதலின் அளவு (அதாவது, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றிற்கு தொடர்பின்மை வகையில் ஏற்படும் அளவு எனப்படு

வது), வேறு பல இயல்புகள் ஆகியவை போன்ற அவற்றிற்குரிய சிறப்பியல்புகளையும் குறிக்கும் குறிப்பிட்ட எண்களாகும். நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டின் பல கணக்குகளை, பங்கீடு விதிகளைப் பயன்படுத்தாது (பெரும்பாலும் பயன்படுத்தாது), எண்ணியல் சிறப்பியல்புகளை மட்டுமே பயன்படுத்தித் தீர்க்க முடியும் என்பது தெரிய வந்துள்ளது. இங்கு, தொடர்பின்மைவகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் எண்ணியல் சிறப்பியல்புகளில் இரண்டை மட்டுமே (ஆனால், மிகவும் முக்கியமானவை இவை) எடுத்துக் கொள்கிறோம். **எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு** மற்றும் **மாறுபாடு.**

தொடர்ச்சியற்ற தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றின் X எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு E[X], அதன் சாத்தியமான அனைத்து மதிப்புகள் மற்றும் அவற்றின் முறையான நிகழ் தகவுகள் ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகையாகும்:

$$E[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_nk_n \quad (4.2)$$

அல்லது, கூட்டல் குறியினைப் பயன் படுத்தினால்

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \quad (4.3)$$

இதில் x_1, x_2,... x_n, ஆகியவை PVX–இன் சாத்தியமான மதிப்புகள்; p_i என்பது RVX, x_i மதிப்பை ஏற்பதற் கான நிகழ் தகவு.

(4.3) சூத்திரத்திலிருந்து தெரிவது போல், தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு X இன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு, அதன் சாத்தியமான எல்லா மதிப்புகளின் ''சராசரி, கூடுதலான'' மதிப்பேயன்றி வேறு எதுவுமில்லை; இம்மதிப்புகளில் ஒவ்வொன்றும், அதன் நிகழ்தகவுக்குச் சமமான ''கூடுதலு''டன் கூட்டுத் தொகையுடன் சேருகின்றது. *(4.2 கணக்கில் போல)* RV–இன் சாத்தியமான மதிப்புகள் எல்லையில்லாத எண்ணிக்கையில் இருந்தால், கூட்டுத்தொகை *(4.3)*, எல்லையில்லாத எண்ணிக்கை கூட்டுமெண்களை உடையதாயிருக்கும்.

RV–இன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு. அல்லது சராசரி, தோராயமான மதிப்பீடுகளில் அதற்கு மாற்றாக இருக்க முடியும். முக்கியமாக, சில கணக்குகளில் தொடர்பின்மை வகையை நாம் புறக்கணிக்கும் போது இதுவே எப்போதும் நிகழ்கிறது.

கணக்கு 4.3. *4.1* கணக்கில் கருதப்பட்ட RVX–இன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்கவும் (மூன்று சுடுதல்களில், தாக்குதல்களின் எண்ணிக்கை).

தீர்வு. *(4.3)* சூத்திரத்தின் படி,

$$E[X] = 0\cdot 0.216 + 1\cdot 0.432 + 2\cdot 0.288 + \\ + 3\cdot 0.064 = 1.2$$

தொடர்ச்சியான RVX–க்கும் நாம் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு என்னும் கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்; *(4.3)* சூத்திரத்தில் கூட்டுத்தொகைக்குப் பதிலாக, வரையுட்படுதொகை

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad (4.4)$$

f(x) என்பது தொடர்ச்சியான RVX–க்

கான நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்ப லன் ஆகும்.

இப்போது எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு என்பதை, அதன் ஸ்தூலமான பொருளினையும் அதன் ''வமிசாவளி'' யினையும் ஆராய்வோம். நிகழ் தகவினுக்கு எவ்வாறு நெருக்கமான உறவுக்கருத்து ஒன்று—அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு—இருக்கிறதோ, அவ்வாறே, எதிர்பார்ப்பு மதிப்புக்கும் ஓர் நெருக்கமான உறவுக்கருத்து—நுனிப்புகளின் விளைவுகளின் கூட்டுச் சராசரி என்பது—இருக்கின்றது. பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க எவ்வாறு அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு, நிகழ் தகவினை நெருங்குகிறதோ, அவ்வாறே, பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை உயரும்போது, RV—இன் காணப்பட்ட மதிப்புகளின் கூட்டுச்சராசரியும்அதன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பினை நெருங்குகிறது.

தொடர்ச்சியற்ற தொடர்பின்றை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களுக்கு இதை மெய்ப்பிப்போம் (தொடர்ச்சியான தொடர்பின்மை வகை மாறி

யல் மதிப்புருக்களுக்கும் இது உண்மை என நாம் சொல்வதை நீங்கள் உடனே ஏற்றுக் கொள்வீர்கள் என நம்புகிறோம்). இவ்வாறு, பின்வரும் பங்கீட்டுத் தொடரையுடைய தொடர்ச்சியற்ற RVX ஒன்று இருப்பதாக வைத்துக் கொள்ளவும்.

χ_i	χ_1	χ_2	...	χ_n
p_i	χ_1	χ_2	...	p_n

பரிசோதனைகளை நிகழ்த்தி, அவற்றின் விளைவாக x_1 மதிப்பு M_1 தடவைகளும் x_2 மதிப்பு M_2 தடவைகளும் என்றவாறு தோன்றுவதாக வைத்துக் கொள்வோம். RVX–இன் நுனிப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியை (இதை X எனக்குறிப்பிடுவோம்) கண்டு பிடிக்கவும்.

$$\overline{X} = \frac{x_1M_1 + x_2M_2 + \dots + x_nM_n}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{M_i}{N}$$

ஆனால், $\frac{M_i}{N}$ என்பது $(x = x_i)$ நிகழ்ச்சி

யின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு ஆகும்; அதை எனக்குறிப்பிடுவோம்;

$$\frac{M_i}{N} = p_i^*;$$

இதிலிருந்து கிடைபபது

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i^*$$

பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது, செயல் முறை நிச்சயத்துடன் கூடிய நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு p_i^* அதன் நிகழ்தக்வான p_i இன் மதிப்பை நெருங்குகின்றது என்பதை நாம் அறிவோம்; எனவே, செயல் முறை நிச்சயத்துடன் கூடிய, பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் போது ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவுக்கு உண்டாகும் நுனிப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுச்சராசரி, எதிர்பார்ப்பு மதிப்பிற்கு விதிக்கட்டுப்பாடியின்றி நெருக்கமான இருக்கும்.

இக்கூற்று, பெரும் எண்ணிக்கைகளின் விதி என்பதன் (செபிஷேவ் தேற்றம் என்று அழைக்கப்படுவதன்)

வடிவங்களில் ஒன்று ஆகும்; நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டின் செயல்முறைப் பிரயோசங்களில் ஒரு முக்கியமான பங்கை அது வகிக்கின்றது. உண்மையில், நிகழ்ச்சியின் தெரியாத நிகழ் தகவினை பரிசோதனைகளின் நீண்ட தொரு தொடரில் கிடைக்கும் அதன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவினால் தோராயமாகக் கணக்கிட முடியுமோ, அவ்வாறே RVX—இன் எதிர்பாரர்ப்பு மதிப்பை, அதன் நுனிப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுச்சராசரியாகத் தோராயமாக நிர்ணயிக்க முடியும்:

$$E[X] \approx \overline{X} \qquad (4.5)$$

பரிசோதனைகளின் முடிவுகளிலிருந்து நாம் அக்கறை கொண்டுள்ள ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் எதிர்ப்பார்ப்பு மதிப்பைக் கணக்கிடுவதற்கு, அதன் பங்கீடு தெரிந்திருக்க வேண்டியது அவசியமில்லை என்பதைக் குறிப்பிட வேண்டும்; நுனிப்புகளின் எல்லா முடிவுகளின் சராசரியைக் கணக்கிட்டாலே போதுமானது.

இன்னும் ஓர் மதிப்பு: திருப்திகரமான திட்ப நுட்பத்துடன் ஒரு தொடர்பின்மைவகை மாறியல் மதிப்புருவின் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு, ''ஹிஸ்டோக்ராம்'', ஒன்றை வரைவதற்குத் தேவைப்படுவதைப் போன்ற எண்ணிக்கை அளவிற்குப் (பல நூறுகள் கணக்கில்) பரிசோதனைகளை நாம் செய்ய வேண்டியதில்லை; (டஜன் கணக்கில் மட்டுமே ஆன) நிரம்பவும் குறைந்த எண்ணிக்கையுள்ள பரிசோதனைகளைச் செய்தாலே போதுமானது.

இப்போது, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றின் மற்றொரு முக்கியமான எண்ணியல் சிறப்பியல்பினை அதன் மாறுபாடு என்பதனை அறிமுகப்படுத்துவோம் மாறுபாடு என்பது, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் மதிப்புகள் அதன் சராசரிக்கு அருகாமையில் சராசரிக்குச் சற்றுக்கூடுதலாகவோ குறைவாகவோ பரவுவதைக் குறிப்பதாகும். மாறுபாட்டின் அளவு

அதிகமாயிருக்க இருக்க தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ''அதிக அளவிற்குக்'' ''குருட்டிணைவு'' உள்ளதாயிருக்கும்.

RVX—இன் மாறுபாடு பின்வரு மாறு கணக்கிடப்படுகிறது; எதிர் பார்ப்பு மதிப்பு (சராசரி)—தொடர் பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் ஒவ்வொரு சாத்தியமான மதிப்பிலிருந்தும் கழிக்கப்படுகின்றது. இங்ஙனம் கிடைக்கப் பெற்ற சராசரியிலிருந்து விலகியுள்ள அளவுகள் அவற்றின் வர்க்கத்திற்கு ஏற்றப்பட்டு, கிடைக்கும் முறையான மதிப்புகளின் நிகழ்தகவினால் பெருக்கப்பட்டு, இப்பெருக்கத் தொகைகள் யாவும் கூட்டப்படுகின்றன. இதிலிருந்து கிடைக்கும் விளைவானது. மாறு பாடு எனப்படுவது; அதை D[X] அல்லது σ^2 என்று குறிப்பிடுகிறோம்:

$$\sigma^2 = D[X] = (x_1 - E[x])^2 p_1 + \\ + (x_2 - E[X]^2 p_2 + \dots + (x_n - E[X]^2)\, p_n$$

அல்லது, சுருக்கமாகக் கூறினால்,

$$\sigma^2 = D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E[X]^2)\, p_i \qquad (4.6)$$

ஒரு கேள்வி எழலாம்: சராசரியிலிருந்து விலகியுள்ள அளவுகள் அவற்றின் வர்க்கத்திற்கு ஏன் உயர்த்தப்பட வேண்டும்+அல்லது—என்பதனை நீக்குவதற்கான அது செய்யப்படுகின்றது. + அல்லது—குறியினை அதை வெறுமளவில் விட்டு விடுவதனால் மட்டுமே விலகல் குணகத்தை எடுத்துக் கொண்டு நாம் நீக்கிட விட முடியும்; ஆனால், அப்போது மாறுபாட்டை விட மிகவும் குறைவான வசதியுள்ள சிறப்பியல்பே நமக்குக் கிடைக்கும்.

கணக்கு 4.4 *4.1* கணக்கில் குறியின் மீதான தாக்குதல்களின் எண்ணிக்கையான x-இன் மாறுபாட்டைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு. *(4.6)* சூத்திரத்திலிருந்து நமக்குக் கிடைப்பது

$$D[X] = (0.1 \cdot 2)^2 \cdot 0.216 + (1 - 1.2)^2 \cdot 0.432 + $$
$$+ (2 - 1.2)^2 \cdot 0.288 + (3 - 1.2)^2 \cdot 0.064 = 0.72.$$

மாறுபட்டினைக் கணக்கிடுவதற்கு

(4.6) சூத்திரம் நிரம்பவும் வசதியா னதில்லை என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். மாறு பாட்டினை

$$D[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \qquad (4.7)$$

என்னும் சூத்திரத்தினால் கணக்கிட முடியும் (சாதாரணமாக அவ்வாறே கணக்கிடப்படுகிறது); அதாவது **ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் பதிப்புரு X-இன் மாறுபாடு X-இன் வர்க்கத்தின் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பிற்கும் X-இன் எதிர் பார்ப்பரின் வர்க்கத்திவகும் உள்ள வித் தியாசமாகும்.**

இந்தச் சூத்திரத்தை, (4.6)–இலிருந்து முற்றொருமை மாற்றங்களை பயன்படுத்திப் பெற முடியும்; ஆனால், நாம் அதைச் செய்யப்போவதில்லை. மாறாக, முந்தையக் கணக்கினைப் பயன்படுத்தி இந்தச் சூத்திரத்தின் மெய்ம்மையினைச் சரிபார்ப்போம்.

$$D[X] : 0^2 \cdot 0.216 + 1^2 \cdot 0.432 + 2^2 \cdot 0.288 + \\ + 3^2 \cdot 0.0064 - (1.2)^2 = 0.72$$

தொடர்ச்சியான தொடர்பின் மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களுக்கு, (4.6)-ஐப் போன்ற சூத்திரத்

தினால் மாறுபாடு கணக்கிடப்படுகிறது; ஆனால் கூட்டலுக்குப் பதிலாகத் தொகையிடல் பயன்படுத்தப்படுகிறது:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)\, ax.$$

வழக்கமாக, (4.7)—ஐப் போன்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவது அதிக வசதியானதாயுள்ளது: அது பின்வருமாறு;

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - (E[X])^2 \qquad (4.9)$$

எதிர்பார்ப்பு மதிப்பினை நிர்ணயிப்பதற்கு எவ்வாறு பங்கீட்டு விதியினை அறிந்திருக்க வேண்டியதில்லையோ, பரிசோதனைகளின் முடிவுகளிலிருந்து நேரடியாக கவனித்தறியப் பெற்ற நுனிப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அவற்றின் விலகல்களின் வர்க்கங்களைச் சராசரிப்படுத்துவதனால் மாறுபாட்டினைத் தோராயமாகக் கணக்கிடவும் முடியும்:

$$D[X] \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - x)^2; \qquad (4.10)$$

இதில், என்பது ஒரு பரிசோதனை யின் வரிசை எண், x_k என்பது k—ஆவது பரிசோதனையில் காணப்படும் RVX—இன் மதிப்பு, N என்பது பரிசோதனைகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ஆகும்.

''சராசரி வர்க்கம்—வர்க்கப்படுத்தப்பட்ட சராசரி''

$$D[X] \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \overline{X}^2 \qquad (4.11)$$

என்னும் சூத்திரத்தினால் மாறுபாட்டினைக் கணக்கிடுவது மேலும் அதிக வசதியானது.

(4.10) மற்றும் *(4.11)* சூத்திரங்களை, அவ்வளவு அதிகமான எண்ணிக்கையுள்ள பரிசோதனைகள் இல்லாமலிருக்கும்போது கூட (ஒன்றுமே இல்லாமல் இருப்பதை விட ஏதாவது மேல்!), மாறுபாட்டின் தோராயமான மதிப்பீடுகளைக் கண்

டுபிடிக்கப்பயன்படுத்த முடியும்; எனவே, அவை மாறுபாட்டினை உயர்ந்த அளவுத்திட்பநுட்பத்துடன் காட்டுவதில்லை. கணித வியற் புள்ளியியலில் அத்தகைய கணக்குகளில், ''பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை சிறியதாயிருப்பதற்கான திருத்தம் ஒன்றை''ப் பயன்படுத்தி, கிடைத்த முடிவு திருத்தல் காரணியான N/(N—1) என்பதனால் பெருக்கப்படுகிறது. இத்திருத்தத்திற்கு மிகையான மதிப்பு எதுவும் தரக் கூடாது. பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை நிரம்பவும் சிறிய எண்ணிக்கையுள்ளதாக இருக்கும் போது, அவற்றின் புள்ளியில் நோக்கு ஆய்விலிருந்து (நீங்கள் எவ்வளவு தான் கடினமாக முயன்றாலும்!) பயனுள்ள எதுவும் பெற முடியாது என்பதனையும், நிரம்பவும் பெரிய எண்ணிக்கையுள்ளதாயிருக்கும் போது, திருத்தல் காரணி ஒன்றிற்கு நிரம்பவும் நெருங்கியிருக்கிறது என்பதனையும் நீங்கள் நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

தொடர்பின்மை வகை மாறியல்

மதிப்புருவின் மாறுபாடு விலகல் பரவலின் சிறப்பியல்பாக இருப்பதனால், அதற்கு சாதகமில்லாத ஒரு கூறு உள்ளது; (4.6) சூத்திரத்திலிருந்து தெரிவதைப் போல், அதன் பரிமாணம் RVX–இன் பரிமாணத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாயுள்ளது. எடுத்துக் காட்டாக, RVX–ஐ நிமிடங்களில் குறிப்பிட்டால், அதன் மாறுபாடு ''நிமிடங்களின் வர்க்கங்களில்'' குறிப்பிடப் பெறுகின்றன; இதற்குப் பொருள் எதுவும் இல்லை. இக்காரணத்தினால் மாறுபாட்டிலிருந்து அதன் வர்க்க மூலம் பெறப்படுகின்றது; விலகல் பரவலுக்கான ஒரு புதிய கூறு கிடைக்கின்றது—அதாவது, திட்டமான விலகல் என்பது:

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} \qquad (4.12)$$

திட்டமான விலகல் என்பது, ஒரு விலகல்படர்வின் வசதியான, நன்கு கண்ணிற்குத் தெரியக்கூடிய ஒரு சிறப்பியல்பாகும். சராசரி மதிப்பின் அருகில், RV-இன் அலைவிகளின் வீச்சைப் பற்றிய ஒரு கருத்தினை அது

உடனடியாக நமக்கு வழங்குகின்றது. செயல் முறை நிச்சயத்துடன் கூடிய, நடை முறையில் எதிர்ப்படும் பெரும்பாலான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களுக்கு, அவை எதிர் பார்ப்பு மதிப்புகளிலிருந்து 3 σx-க்கு மேற்படாது விலகியிருக்கின்றன என நாம் அறுதியிட்டுக் கூற முடியும். நம்பிக்கை அளவு என்பது RV—இன் பங்கீட்டினைச் சார்ந்திருக்கின்றது; நடை முறையில் அதன் மதிப்பு சற்று அதிகமானதாகவே இருக்கின்றது. மேற்கூறப்பட்ட விதி ''மூன்று ஸிக்ம விதி'' என்றழைக்கப்படுகின்றது.

இவ்வாறு, RVX—இன் இரு எண்ணியல் சிறப்பியல்புகளை—அதன் எதிர்ப்பார்ப்பு மதிப்பு மற்றும் திட்டமான விலகல் ஆகியவற்றை ஏதாவதொரு வழி வகையினால் நாம் கண்டுபிடித்து விட்டால், அதன் சாத்தியமான மதிப்புகள் குறித்த ஒரு தற்காலிகக் கருத்தை நாம் உடனே பெற முடியும்.

இங்கு நீங்கள் ஒரு கேள்வி கேட்கலாம்: பரிசோதனையிலிருந்து இச்

சிறப்பியல்புகளை நாம் கண்டு பிடித்தோம் என்றால், அதே பரிசோதனையிலிருந்து சாத்தியமான மதிப்புகளின் வரம்புகளை நாம் நிர்ணயிப்பதை யார் தடுக்க முடியும்?

இச்சிறப்பியல்புகளைப் பரிசோதனைகளிலிருந்து நேரடியாகக் கண்டு பிடிக்கப்படும்போது உங்களின் கூற்று முற்றிலும் சரியானதாகவே இருக்கும். ஆனால், நிகழ் தாவுக் கோட்பாட்டில், எண்ணியல் சிறப்பியல்புகளை நிர்ணயிப்பதற்கான இந்த (நேரடியான) வழிவகைகள் பிரதானமானவை அல்ல. நாம் அக்கறை கொண்டிருக்கும் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களுடன் சம்பந்தப்பட்டுள்ள பிற தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் எண்ணியல் சிறப்பியல்புகளைக் கொண்டு முந்தையவற்றின் எண்ணியல் சிறப்புயல்புகளைக் கண்டு பிடிப்பதைச் சாத்தியமாக்கும் அடிப்படையான வழிவகைள் மறைமுகமான வழிவகைகளே அன்றி நேரடியான வகைகள் அல்ல என்பதை நாம் மீண்

டும் வலியுறுத்த வேண்டும். அத்த கையவற்றில், எண் கணிதத்தின் **அடிப்படை விதிகள்,** எண்ணியல் சிறப்பியல்புகளுக்குப் பயன்படுத்தப் பெறுகின்றன.

1. **எதிர்பார்ப்பு மதிப்பின் கூட்டல் வகை.** தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் கூட்டுத் தொகையின் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு கூட்டு மெண்களின் கூட்டுத் தொகை களுக்குச் சமமாகும்.

2. **மாறுபாட்டின் கூட்டல் வகை.** தனிப்பட்ட, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் கூட்டுத் தொகையின் மாறுபாடு கூட்டு மெண் களின் மாறுபாடுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

3. **எதிர்பார்ப்பு மதிப்பிற்கு வெளியே ஒரு நிலையான காரணியை எடுப்பது:**

$$E[cX] = cE[X]$$

4. **மாறுபாட்டிற்கு வெறியே ஒரு நிலையான காரணியை எடுப்பது.** வர்க்கத்திற்கு ஏற்றப்பட்ட நிலை யான காரணி c—ஐ மாறுபாட்டிற்கு

வெளியே எடுக்க முடியும்:

$$D[cX] = c^2 D[X]$$

ஒரு கால் கடைசி விதியைத் தவிர, இந்த விதிகள் யாவும் இயல்பானவையாகவே தோன்றுகின்றன. கடைசி விதியின் மெய்ம்மையினைப் பற்றி நீங்கள் உறுதி செய்து கொள்வதற்கு, பின்வரும் எடுத்துக்காட்டை எடுத்துக் கொள்ளவும். தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றை X—ஐ அதன் வர்க்கத்திற்கு ஏற்றுவதாக வைத்துக்கொள்வோம். அதன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பும் வர்க்கத்திற்கு ஏற்றப்படுகின்றது. சராசரியிலிருந்து ஒரு தனிப்பட்ட மதிப்பின் விலகல் அளவும் இரு மடங்கு அதிகமாகிறது; அதன் வர்க்கம் நான்கு மடங்கு அதிகரிக்கின்றது.

நீங்கள் இப்போது பார்க்கப் போவது போல், இந்தச் சிறிய விதிகளின் தொகுப்புக் கூட, சில ஆர்வமூட்டும் பிரச்னைகளைத் தீர்ப்பதற்குப் போதுமானதாயுள்ளது.

பிரச்னை 4.1 N தனிப்பட்ட பரி

சோதனைகள் நிகழ்த்தப்படட்டும்; அவை ஒவ்வொன்றிலும் நிகழ்ச்சி A நிகழ் தகவு p அளவுடன் நிகழ்கின்றது. தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றை—நிகழ்ச்சி A நிகழும் பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை (சுருங்கக்கூறின், நிகழ்ச்சி A நிகழும் எண்ணிக்கை) ஐக் கருதுவோம். X—இன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு மற்றும் மாறுபாடு ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு. X-ஐ N தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் கூட்டுத் தொகையாகக் குறிப்பிடவும்.

$$X = X_1 + X_2 + \dots X_n = \sum_{k=1}^{N} X_k; \quad (4.13)$$

இதில், k—வது பரிசோதனையில் நிகழ்ச்சி A நிகழ்த்தால் RVX_k ஒன்றுக்குச் சமமாகவும், நிகழ்ச்சி A நிகழாமலே இருந்து விட்டால் அது பூஜ்யத்திற்குச் சமமாகவும் இருக்கும். இப்போது, எதிர்பார்ப்பு மதிப்பின் கூட்டல் வகையினைப் பயன்படுத்தவும்:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{N} E[X_k] \qquad (4.14)$$

பரிசோதனைகள் தனிப்பட்டன வாயிருப்பதால், தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் $X_1, X_2, \ldots X_n$ ஆகியனவும் தனிப்பட்டனவே, மாறுபாட்டின் கூட்டல் வகையினைப் பயன்படுத்தினால் கிடைப்பது

$$D[X] = \sum_{k=1}^{N} D[X_k]$$

X_k தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களுள் ஒவ்வொன்றின் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பினையும் மாறுபாட்டினையும் இப்போது கண்டுபிடிப்போம். அவற்றுள் ஏதாவதொன்றை எடுத்துக்கொள்ளவும். ஒவ்வொரு RV—உம் தொடர்ச்சியற்றது. அதற்கு இரு சாத்தியமான மதிப்புகள், முறையே நிகழ் தகவுகள் $(1-p)$ மற்றும் p உள்ள மற்றும் 1. அத்தகைய தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றின் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு

$$E[X_k] = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

(4.7) சூத்திரத்தைக் கொண்டு, மாறுபாட்டினைக் கண்டு பிடிக்க முடியும்:

$$D[X_k] = 0^2\cdot(1-p) + 1^2\cdot p - (E[X]) = $$
$$= p - p^2 = p(1-p)$$

இம்மதிப்பை *(4.14)* மற்றும் *(4. 15)* சூத்திரங்களில் வைத்தால் நமக்கு வேண்டிய அளவுருக்கள் கிடைக்கின்றன:

$$E[X] = Np, \; D[X] = Np(1-p)$$

பிரச்னை 4.2 N தனிப்பட்ட பரிசோதனைகள் நிகழ்த்தப்படட்டும்; ஒவ்வொன்றிலும் நிகழ்ச்சி, p நிகழ்தகவுடன் நிகழ்கின்றது. தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு P^*, இத் தேர்வாய்வுச் சோதனைகள் தொடரில் நிகழ்ச்சி A—இன் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு இவற்றைக் கருதுவோம். RVP*—இன் சாத்தியமான மதிப்புகளின் வீச்சினைத் தோராயமாகக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு: வரையறுப்பின்படி, அடுக்கு

நிகழ்வு விரைவு, தேர்வாய்வுச் சோதனைகளின் மொத்த எண்ணிக்கை N—க்கும் நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை X—க்குமுள்ள தகவு ஆகும்:

$$P^* = \frac{X}{N}$$

இந்தத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் எண்ணியல் சிறப்பியல்புகளை (அதாவது, எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு மற்றும் மாறுபாடு ஆகியவற்றை) கண்டு பிடிப்போம். சிறப்பியல்புகள் *3* மற்றும் *4* ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தினால் நமக்குக் கிடைப்பது,

$$E[P^*] = E\left[\frac{X}{N}\right] = \frac{1}{N} E[X] = \frac{Np}{N} = p,$$

$$D[P^*] = D\left[\frac{X}{N}\right] = \frac{1}{N^2} D[X] =$$

$$= \frac{Np(1-p)}{N^2} = \frac{p(1-p)}{N}$$

மாறுபாட்டின் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடித்தால், திட்ட விலகலளவு σp^* கிடைக்கின்றது:

$$\sigma p^* = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

இப்போது, RVP*—இன் செயல் முறையின் சாத்தியமான மதிப்புக ளின் வீச்சைத் தோராயமாகக் கண்டு பிடிப்பதற்கு ''மூன்று ஸிக்மா விதி'' யைப் பயன்படுத்தவும்.

$$p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

நீங்கள் கவனமாகப் பார்த்தீர்க ளானால், ''இது நமக்கு ஏற்கென வேயே தெரிந்தது தானே!'' என்று வியப்புடன் கூறுவீர்கள். ''தேர்வாய் வுச் சோதனைகளின் எண்ணிக்கை N பெரியதாய் இருக்கும்போது, ஒரு நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரை வின் மதிப்பு 0.997 நிகழ்தகவுடன் பொருந்தும் நம்பிக்கை இடை வெளி யினைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு இதே சூத்திரத்தைத் தானே கூறினீர்கள். இந்தச் சூத்திரத்தோடு கூட (அதை விட மேலானதாக), வர்க்க மூலத்திற்கு முன்னால் 3 இல்லாது 2—ஐ-யுடைய இன்னொரு சூத்திரத்தையும் வழங்கி னீர்கள். எங்கள் நினைவு சரியானதா யிருந்தால், அச்சூத்திரம் 0.95 நிகழ்

தகவு அளவுடன் பொருந்தியது. ஆகவே, இப்போது சூத்திரங்கள் நம்மிடம் உள்ளன. ஆனால், நிகழ் தகவு எங்கிருந்து வந்தது.''

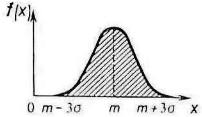
சற்று நிதானியுங்கள்; பொறுமையுடன் இருக்கவும். 0.997 மற்றும் 0.95 நிகழ் தகவுகளை எங்கிருந்து நாம் பெற்றோம் என்பதைப் புரிந்து கொள்வதற்கு, ஒரு மிக முக்கியமான பங்கீட்டை—**இயல்பான** பங்கீடு எனப் படுவதை—நீங்கள் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

தொடர்ச்சியான, தொடர்பின் வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றை, X—ஐ, எடுத்துக் கொள்ளவும், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (4.16)$$

என்னும் சூத்திரத்தினால் குறிக்கப்படுவதாயிருந்தால், அது இயல்பான பங்கீட்டை உடையது எனச் சொல்லப்படுகின்றது; π என்பது வடிவ கணிதவியல் வாயிலாத உங்க

ளுக்கு நிரம்பவும் பழக்கமானதாகும்; e என்பது இயற்கை லாகரிதங்களின் அடியாகும் ($e \approx 2.71828...$) இயல்பான பங்கீட்டு வளைகோடு மணி வடிவிலான ஒரு சமச்சீர் வடிவம் கொண்டதாயுள்ளது (படம் 5); m புள்ளியல் பெருமளவினை எய்துகிறது, m புள்ளியிலிருந்து மேலும் சென்றால், அடர்த்திச் சார்பலன் மதிப்பிழந்து, வரம்பு நிலையில் பூஜ்யத்தை நெருங்குகிறது. (4.16) சூத்திரத்தில் இரண்டு ததிணையியல் நிலையளவுருக்கள் உள்ளன: m மற்றும் σ நீங்கள் ஊகித்திருப்பது போலவே, m என்பது எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு; σ என்பது திட்டமான விலகல் அளவு. m–இன் மாறுதலை ஒட்டி, வளைகோடு x அச்சின் மீது முன்னும் பின்னுமாக நகரும். σ-ஐ மாற்றினால், σ அதிகரிக்கும் போது f(x) வளைகோடு தனது வடிவை மாற்றிக் கொண்டு ''தட்டை''யாக ஆகும்; σ குறையும் போது, அவ்வளைகோடு ஊசி போன்ற வடிவைப் பெறும்.



நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் இயல்பான பங்கீட்டிற்குள்ள சிறப்பான பங்கிற்குக் காரணம் அதற்கிருக்கும் ஒரு குறிப்பிடத்தக்க சிறப்பியல்பாகும். மாறுபாடுகளின் அளவில் ஒப்பிடும் போது, தனிப்பட்ட (அல்லது பலவீனமாகச் சார்ந்திருக்கும்) ஏராளமான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களைக் கூட்டினால், கூட்டுமெண்களின் பங்கீடுகள் எவ்வாறு இருப்பினும் கூட்டுத் தொகையின் பங்கீடு இயல்பான பங்கீட்டிற்கு நெருங்கியதாயிருக்கும்; தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாய் இருக்க நெருக்கம் மேலும் அதிகமாயிருக்கும். மேற்கூறிய கூற்று மைய வரம்புத் தேற்றம் என்று அழைக்கப்படுவதன் தோராயமான கூற்று

ஆகும்; நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் இது மிக முக்கியமானதொரு பங்கை வகிக்கின்றது. கூட்டுமெண்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிப்பதற்கேற்பத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் கூட்டுத் தொகை இயல் நிலைப்படுத்தப்படுவதன் பொருட்டு அவை நிறைவேற்ற வேண்டிய நிபந்தனைகளிலுள்ள வித்தியாசங்களைப் பொறுத்து, இத்தேற்றத்திற்கு அதிக அளவு வேறுபாடுகள் உள்ளன.

நடை முறையில், தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் பல, ''கூட்டில் சிந்தாந்த''த்தினால் அமைகின்றன; எனவே, அவற்றின் பங்கீடு இயல்பானதாக அல்லது ஏறத்தாழ இயல்பானதாக உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக பல அளவீடுகளில் வெவ்வேறு காரணங்களினால் ஏற்படும் பல ''சாதாரண'' மற்றும் செயல் முறையில் தனிப்பட்ட பிழைகளின் கூட்டுத்தொகைகளான பிழைகள் அத்தகையனவாகும். பொதுவாக, குறியின் மீது எய்தல், முறைப்படுத்

துதல் மற்றும் இணைத்தல் (பதிவு செய்தல்) ஆகியவற்றில் பங்கீடு இயல்பானதாக உள்ளது. மின்சுற்று ஒன்றில் குறிப்பிட்ட ஓர் அளவு மின்னழுத்தத்தில் ஏற்படும் சிறு மாறுதல்கள் அல்லது விலகல் அளவுகளுக்கும் பல தனிப்பட்ட காரணங்களினால் ஏற்படும் கூட்டு விளைவே காரணமாயுள்ளது. நீண்ட காலமாக காப்பு நிறுவனம் ஒன்றிற்குச் செலுத்தப்படும் மொத்தப் பணம், அல்லது, கணிப்பான் ஒன்று ஆண்டு ஒன்றுக்கு இயங்காதிருக்கும் நேரம் போன்ற தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் பங்கீடுகள் இயல்பானதாக (அல்லது ஏறத்தாழ இயல்பானதாக) உள்ளன. முக்கியமாக, தேர்வாய்வுச் சோதனைகளின் எண்ணிக்கை பெரும்எண்ணிக்கையில் (N) இருக்கும் போது, நிகழ்ச்சி ஒன்றின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு போன்ற, ஆர்வத்தைக் கிளப்பும் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு தோராயமாக இயல்பான பங்கீடு உள்ளதாகவே அமைகின்றது என்பதைக் காண்

பிப்போம். உண்மையில்,

$$p^* = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{X_k}{N};$$

இதில் $X_к$ என்பது ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு; அதன் மதிப்பு; ஆவது தேர்வாய்வுச் சோதனையில் நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்தால் ஒன்றுக்குச் சமம்; நிகழ்ச்சி நிகழா விட்டால் அது பூஜ்யத்திற்குச் சமம் ஆகும்; தேர்வாய்வுச் சோதனைகளின் எண்ணிக்கை பெருவாரியான அளவில் இருக்கும்போது, அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு p* ஏராளமான தனிப்பட்ட கூட்டுமெண்களின் மொத்தமாகும்; இவற்றுள் ஒவ்வொன்றும்

$$D\left[\frac{X_k}{N}\right] = \frac{1}{N^2}\, p\,(1-p)$$

மதிப்புள்ள அதே மாறுபாட்டினை உடையதாகும். எனவே, தேர்வாய்வுச் சோதனைகளின் எண்ணிக்கை பெரிய அளவில் இருக்கும்போது, நிகழ்ச்சி A—இன் அடுக்கு நிகழ்வு

விரைவான p* இயல்பான பங்கீட்டினை உடையதாய் இருக்கிறது என நாம் முடிவு செய்யலாம்.

இயல்பான பங்கீடே நடை முறையில் அடிக்கடி தென்படுவதால், இயல்பான பங்கீட்டினையுடைய RVX(a,b) இடைவெளியின் வரம்புகளுள் பொருந்தும் நிகழ் தகவினைக் கணக்கிடுவது அடிக்கடி அவசியமாகிறது. (4.1) தொகையினை அடிப்படைச் சார்பலன்களின் வகையில் சொல்ல முடியாது; அதைக் கணக்கிடுவதற்கு,

$$\Phi (x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x e — t^2/2 \, dt$$

என்னும் **லாப்லஸ் சார்பலன்** என்றழைக்கப்பெறும் ஒரு சார்பலனுக்குத் தொகுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணைகள் பயன் படுத்தப்படுகின்றன. லாப்லஸ் சார்பலனுக்கான அட்டவணைகளின் ஒரு பகுதி அடியில் தரப்பட்டுள்ளது.

x	Φx	x	Φx	x	Φx	x	Φx
0.0	0.0000	1.0	0.3413	2.0	0.4772	3.0	0.4986
0.1	0.0398	1.1	0.3643	2.1	0.4821	3.1	0.4990
0.2	0.0793	1.2	0.3849	2.2	0.4861	3.2	0.4993
0.3	0.1179	1.3	0.4032	2.3	0.4893	3.3	0.4995
0.4	0.1554	1.4	0.4192	2.4	0.4918	3.4	0.4997
0.5	0.1915	1.5	0.4332	2.5	0.4938	3.5	0.4998
0.6	0.2257	1.5	0.4452	2.6	0.4953	3.6	0.4998
0.7	0.2580	1.7	0.4554	2.7	0.4965	3.7	0.4999
0.8	0.2881	1.8	0.4641	2.8	0.4947	3.8	0.4999
0.9	0.3159	1.9	0.4713	2.9	0.4981	3.9	0.5000

$x \leqslant 4$ என்பயற்கு, $\Phi(x) = 0.5000$ என்று நான்கு தசாம்ச இடங்கள் வரை நாம் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

இவ்வட்டவணையைப் பயன் படுத்துகையில், வார்லன் விசித்திர மானது, அதாவது, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ என்பதனை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

m மற்றும் σ திணையியல் நிலை யளவுருக்களைக் கொண்ட இயல் பான பங்கீட்டினையுடைய RVX(a,b) இடை வெளியின் வரம்புகளினுள் பொருந்துவதற்கான நிகழ்தகவு, லாப்லஸ் சார்பலன் வகையில்

$$P(a,\ b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \quad (4.17)$$

என்னும் சூத்திரத்தினால் குறிக்கப்படுகின்றது.

கணக்கு 4.5. m மற்றும் σ திணையியல் நிலையளவுருக்களைக் கொண்ட இயல்பான பங்கீட்டினையுடைய RVX a) அதன் சராசரி அளவிலிருந்து, 2 σ-க்கும் குறைவாக, (b) 3σ—க்கும் குறைவாக விலகுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

நீர்வு: *(4.17)* சூத்திரத்தையும் அட்டவணையையும் பயன்படுத்தினால் நாம் காணுவது

$$(a)\ P(m-2\sigma,\ m+2\sigma)=\Phi\left(\frac{m+2\sigma-m}{\sigma}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{m-2\sigma-m}{\sigma}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)=$$

$$=\Phi(2)+\Phi(2)=0.4772+0.4772=$$
$$=0.9544\approx 0.95.$$

$$(b)\ P(m-3\sigma,\ m+3\sigma)=\Phi(3)-\Phi(-3)=$$
$$=\Phi(3)+\Phi(3)=0.4986+0.4986=$$
$$=0.9972\approx 0.997$$

அத்தியாயம் 2—ல் ஒரு நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்கான நாம் அமைத்த இரண்டு நம்பிக்கக்

குணங்களான 0.95 மற்றும் 0.997 ஆகியவற்றை நாம் கடைசியில் பெற்று விட்டோம். சிரமமான போராட்டம் எனினும், முடிவில் நாம் சாதித்து விட்டோம்!

ஆனால், இப்போது இயல்பான பங்கீடு பற்றித் தெரிந்திருப்பதால், அறிவூட்டும் சில கணக்குகளுக்கு நாம் தீர்வு காண முடியும்.

கணக்கு 4.6. ஒரு ரயில் வண்டித் தொடரில் 100 பரரப் பெட்டிகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பாரப்பெட்டியின் எடையும், எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு $m_g = 65$ டன்களும் திட்ட விலகலளவு $\sigma_g = 9$ டன்களும் கொண்ட ஒரு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவாகும். ரயில் வண்டித் தொடரின் எடை 6600 டன்களுக்கு மேற்படாமலிருந்தால், ஓர் எஞ்சினே அதை இழுக்க முடியும்; இல்லாவிடில், கூடுதல் எஞ்சின் ஒன்று தேவைப்படும். கூடுதல் எஞ்சின் தேவைப்படாததற்கான நிகழ் தகவினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு: ரயில் வண்டித் தொடரின் எடை X—ஐ 100 தொடர்பின்மை வகை மதிப்புருக்களாம Q_k தனிப் பட்ட பெட்டிகளின் எடைகளாகக் குறிப்பிட முடியும்:

$$X = \sum_{k=1}^{100} Q_k$$

இந்தத் தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்கள் m_q 65 என்னும் அதே எதிர்ப்பு மதிப்புகளையும், $D_q = \sigma_q^2 = 81$ என்னும் அதே மாறுபாட்டினையும் உடையனவாகும்; எதிர் பார்ப்பு மதிப்புகளுக்கான கூட்டல் விதிப்படி,

$$E[X] = 100 \cdot 65 = 6500$$

மாறுபாட்டிற்கான கூட்டல் விதிப்படி

$$D[X] = 100 \cdot 81 = 8100$$

—இன் வர்க்கமலத்தின்னைக் கணக்கிட்டால், நமக்குக் கிடைக்கும் திட்டமான விலகலளவு

$$\sigma_k = \sqrt{D[X]} = 90.$$

ரயில் வண்டித் தொடரை ஓர்

எஞ்சினே இழுப்பதற்கு, வண்டித் தொடரின் எடை ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதாய் இருக்க வேண்டும்; அதாவது, அது (0.6600) என்னும் இடைவெளியினுள் பொருந்த வேண்டும். 100 கட்டுமெண்களின் கூட்டுத் தொகையான, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு X—ஐ இயல்பான பங்கீட்டினை உடையதாகக் கருதலாம். (4.17) சூத்திரத்தின் படி,

$$P=(0.6600)=\Phi\left(\frac{6600-6500}{90}\right)-$$
$$-\Phi\left(\frac{0-6500}{90}\right)=\Phi\left(\frac{100}{90}\right)-\Phi\left(\frac{-6500}{90}\right)\approx$$
$$\approx\Phi(1.1)-\Phi(-72)=\Phi(1.1)+\Phi(72)\approx$$
$$\approx 0.387+0.500=0.887$$

எனவே, எஞ்சின் 0.887 நிகழ்தகவுடன் ரயில் வண்டித் தொடரைக் ''கையாள'' முடியும்.

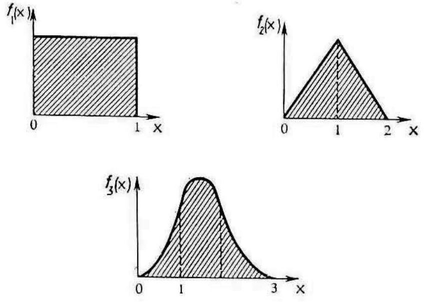
இப்போது, பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையில் இரண்டைக் குறைந்து விடலாம்; அதாவது, N = 98 அத்தகைய ரயில் வண்டித் தொடரை எஞ்சின் இழுக்கக் கூடிய நிகழ்தகவினை நீங்களே கண்டு பிடிக்க முயலவும். கணக்கீட்டின் நிகழ் தகவு தோராயமாக 0.99 ஆக இருக்கும்; அதாவது,

இந்த நிகழ்ச்சி நடைமுறையளவில் நிச்சயமான ஒன்று என்றாகிறது (8)! இந்நிலையை அடைவதற்கு நாம் செய்ய வேண்டியது எல்லாம் இரண்டு பெட்டிகளை எடுத்து விட வேண்டும்.

ஏராளமான தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் சேர்க்கைகள் பற்றிய, ஆர்வமூட்டும் எத்தகைய கணக்குகளுக்கு நம்மால் தீர்வு காண முடியும் என்பது இப்போது உங்களுக்குத் தெரியும்.

இங்கு, இயல்பாக ஒரு கேளவி எழுகின்றது; இந்த ''ஏராளம்'' என்பது எந்த அளவிற்கு ''ஏராளம்''? எத்தனை தொர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களை; அவற்றின் கூட்டுத் தொகைக்கு இயல்பான பங்கீடு இருக்க வேண்டுமானால், நாம் எழுத்துக் கொள்ள வேண்டும்? அது, கூட்டுமெண்களின் பங்கீடுகளைச் சார்ந்திருக்கின்றது. சற்று அதிகமான எண்ணிக்கையில் கூட்டுமெண்களை எடுத்துக் கொண்டால் தான் இயல் நிலைப் படுத்துதல் சாத்தியமாகும் என்பதான அத்தகை சிக்கலான பங்கீடுக

ளும் உள்ளன. நாம் மீண்டும் கூறலாம்; கணிதவியலறிஞர்கள் எத்துணை சாமர்த்தியமானவர்களாக இருக்கிறார்கள்! ஆனால், இயற்கை அத்தகைய இடைஞ்சல்களை வேண்டும் வன்றே தோற்றுவிப்பதில்லை. செயல் முறையில் இயல்பான பங்கீட்டினைப்பயன்படுத்துவதற்கு, 5—இலிருந்து 6 வரை அல்லது 10 அல்லது அதிகப்பட்சம் 20 கூட்டுமெண்கள் இருந்தாலே (அதிலும் முக்கியமாக அவை யாவும் ஒரே பங்கீடுகளை உடையனவாயிருந்தால்) சாதாரணமாகப் போதுமானதாகும்.



ஒரே மாதிரியான பங்கீடுகளை உடைய, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களின் கூட்டுத் தொகையின் பங்கீடு எவ்வளவு விரைவாகச் சமநிலையை அடைகின்றது என்பதை எடுத்துக்காட்டு ஒன்றினால் எடுத்துக்காட்ட முடியும். (அதை அப்படியே தான் நீங்கள் நம்ப வேண்டும்—வேறு எதுவும் செய்ய முடியாது! இன்னுமும் நாங்கள் உங்களை ஏமாற்றிவிடவில்லை.) (0.1 இடைவெளியில் நிலையான அடர்த்திப் பங்கீடு உள்ள தொடர்ச்சியான, தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்று இருப்பதாக நாம் வைத்து (படம் 6) பங்கீட்டு வரைப்படம் செவ்வக வடிவ வகையினைச் சேர்ந்தது. இயல்பான பங்கீட்டிலிருந்து எத்தனை விலகியிருப்பது போல் அது தோன்றுகிறது! ஆனால், அத்தகைய இரண்டு (தனிப்பட்ட) தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களை நாம் கூட்டினால், ஸிம்ஸன் பங்கீடு (படம் 7) என்று அழைக்கப்படும் பங்கீட்டுடன்

கூடிய ஒரு புதிய RV நமக்குக் கிடைக் கிறது; ஸிம்ஸன் பங்கீடு இயல்பான பங்கீட்டிலிருந்து மாறுபட்டு உள் ளது; ஆனால், இப்போது குறைந்த அளவிற்கே மாறுபட்டுள்ளது... நிலையான பங்கீடுகள் உள்ள, அத்த கைய மூன்று தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களை நாம் கூட் டுனோமானால், படம் 8—இல் காட் டப்பட்டிருக்கும் பங்கீட்டு வரைப் பட்டிருக்கும் பங்கீட்டு வரைப்பட முள்ள ஒரு RV நமக்குக் கிடைக்கும் இந்த வரைப்படம் மூன்று பரவளை யப்பகுதிகள் உள்ளதாய் அமைந்தது. இயல்பான பங்கீட்டினைப் பெருமள விற்கு ஒத்திருக்கிறது. மேலும், நிலை யான பங்கீடுகள் உள்ள ஆறு தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களைக் கூட்டி னோமானால், இயல்பான பங்கீட்டிலி ருந்து வேறுபாடு எதுவுமே கண்டுபி டிக்க முடியாத வரைப்படம் நமக் குக் கிடைக்கும். தொடர்பின்மை வகைத் தோற்றங்களைக் கணிப்பா னில் மாதிரிப்படுத்துவதன் வாயிலா

கத் தொடர்பின்மை வகை மதிப்பு ருக்களின் இயல்பான பங்கீட்டினைப் பெறும், பெருமளவிற்குப் பயன்ப டுத்தப்படும் வழிவகையினை இவ்வி வரம் நியாயப்படுத்துகிறது: (0.1) இடைவெளியில் சீரானபங்கீடுகள் உள்ள ஆறுதனிப்பட்ட தொடர்பின் மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்க ளைக்கூட்டினால் போதும் நிற்க, பெரும்பாலான கணிப்பான் வகைக ளில் அத்தகைய தொடர்பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக்களைத் தோற்றுவிக்கும்''ஆக்கி''கள் பொருத் தப்பட்டுள்ளன.

இன்னமும் நாம் இயல்பான பங் கீட்டில் ஆர்வம் கொண்டு, தொடர் பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருக் கள் பலவற்றின் கூட்டுத் தொகை யின் பங்கீடு இயல்பானது என்று சொல்ல விடக்கூடாது. முதன் முத லில், என்ன பங்கீடுகளை அவை பெற் றுள்ளன என்பதை (முதல் தோரா யத்திற்காவது) பார்க்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, அவை நிரம்ப வும் சமச்சீரற்று இருந்தால், ஏராள

மான அளவில் கூட்டுமெண்கள் இருக்க வேண்டும். முக்கியமாக, ''தேர்வாய்வுச் சோதனைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாயிருக்கும் போது, அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு இயல்பான பங்கீட்டினைப் பெற்றுள்ளது'' என்னும் விதி, விழிப்புடன் பயன்படுத்தப்பட வேண்டும். ஒரு தேர்வாய்வுச் சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவு p நிரம்பவும் குறைவாயிருந்தால் (அல்லது, மாறாக, ஒன்றுக்கு நெருக்கமாயிருந்தால) தேர்வாய்வுச் சோதனைகள் ஏராளமான எண்ணிக்கையில் இருக்க வேண்டியிருக்கும். நிற்க, இயல்பான பங்கீட்டினை நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்கு பயன்படுத்த முடியுமா, முடியாதா என்பதை நாம் சரிபார்ப்பதைச் சாத்தியமாக்கும் ஒரு செயல் முறை வழிவகை உள்ளது (0.997 நம்பிக்கை அளவுடன்) தெரிந்த வழிவகையினைப் பயன்படுத்தி நிகழ்ச்சியின் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவிற்கான நம்பிக்கை அளவை நாம் நிர்ணாயிக்க முடியும்:

$$p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}};$$

முழு இடைவெளியும் (அதன் இரண்டு முனைகளும் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுக்கான எனவே, நிகழ் தகவுக்கான (0.1) நியாயமான இடமளிக்கவில்லை எனில், நாம் இயல்பான பங்கீட்டினைப் பயன்படுத்த முடியும். ஆயினும் இடை வெளியின் எல்லைகளுள் ஒன்று இடைவெளிக்கு (0.1) வெளியே இருந்தால், அப்போது இயல்பான பங்கீட்டினைப் பயன்படுத்த முடியாது. இங்கு, பிரச்னைக்குத் தோராயமான தீர்வு காண்பதற்கு, பாய்ஸான் பங்கீடு எனப்படும்—வேறு ஒரு பங்கீட்டினை நாம் பயன்படுத்த வேண்டும். ஆனால் இந்தப் பங்கீடு (மற்றும் வேறு பங்கீடுகள் பலவும்—நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டில் மிகப்பல பங்கீடுகள் உள்ளன) இந்நூலின் திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

இருந்தாலும், இந்த எளிய நூலைப்படித்த பிறகு, உங்களுக்கு நிகழ் தகவு மற்றும் அதன் பிரச்னை

கள் பற்றி ஓரளவாவது தெரியவந் திருக்கும் என்று நாம் எண்ணுகிறோம். ஒரு வேலை, இதைத் தாங்க முடியாதும் போயிருக்கலாம்; அப்போது முதல் அறிமுகமே கடைசியானதாகவும் இருந்திருக்கும். இது வந்தத் தக்கதே; இயினும் எதுவும் செய்ய முடியாது: (கணித வியலறிஞர்களிடையே கூட) நிகழ் தகவுக் கோட்பாட்டினை வெறுப்பவர்கள் இருக்கின்றனர்.

ஆனால், நிகழ் தகவுக் கோட்பாடு பற்றிய கருத்துக்கள், வழி வகைகள் மற்றும் சாத்தியக்கூறுகள் ஆகியவை சுவையார்ந்தனவாக இருப்பதை நீங்கள் கண்டு கொண்டிருப்பதும் சாத்தியமே (இந்நூலின் நோக்கமே அது தான்). அவ்வாறு எனில், அதைப் பற்றி நீங்கள் மேலும் விரிவாகப் படிக்கலாம் (நிகழ் தகவு பற்றிய குறிப்பு நூல்கள் அட்டவணையைப் பார்க்கவும்), நிகழ் தகவுக் கோட்பாடு குறித்த ஆழமான அறிவைப் பெறுவதற்கு, இந்த ''தொடக்கப்படிகள்'' நூலைப் படிப்பதற்கான

முயற்சியை விட மேலும் கவனமான மன முயற்சி வேண்டும் என்பதை நாங்கள் மறைக்கவில்லை. அடுத்த படிகள் மேலும் கடினமானவையாய் இருக்கும்; ஆனால், மேலும் சுவை யார்ந்தனவாயிருக்கும். ''கற்றலின் வேர்கள் கசப்பானவை, ஆனால், அது வழங்கும் கனிகள் இனிப்பானவை'' என்னும் முதுமொழி உங்களுக்குத் தெரிய வேண்டும். நிரம்பவும் இனிப் பான கனிகள் உங்களுக்குக் கிடைக்க வேண்டும் என்பதே எங்கள் விருப் பம்.

குறிப்பு நூல்கள்

மோஸ்டெல்லர், எப். ஏ.ஓ. நிகழ் தகவு ஒரு முதல் பாடக் கோவை. ரீடிங், 1961.

பெல்லர், டபிள்யூ. நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு மற்றும் அதன் பயன் முறைகள் ஆகியவற்றுக்கு ஓர் அறிமுகம். மூன்றாம் பதிப்பு. தொகுதி 1, வைலி, நியூயார்க, 1968.

பெல்லர், டபிள்யூ. நிகழ் தகவுக் கோட்பாடு மற்றும் அதன் பயன் முறைகள் ஆகியவற்றுக்கு ஓர் அறிமுகம். தொகுதி 2. வைலி, நியூயார்க், 1966.

டேவிட், எப். என். விளையாட்டுக்கள், கடவுளர் மற்றும் சூதாட்டம். மிகப்பழங்கலத்திலிருந்து நியூட்டன் யூகம் வரையிலான, நிகழ் தகவு மற்றும் புள்ளியியல் கருத்துகள் ஆகியவற்றின் தோற்றமும் வரலாறும். ஹாப்னர், நியூயார்க், 1962.

பார்ஸென், ஈ நவீன நிகழ்தகவுக் கோட்பாடும் அதன் பயன் முறைகளும். வைலி, நியூயார்க், 1979.

ஸெபெர், ஜீ. ஏ. எப். ஆரம்பப்புள்ளியியல். வைலி, ஸிட்னி, 1974

ஆல்டெர், எச். எல்., ரீஸ்லெர், ஈ. பீ. நிகழ் தகவு மற்றும் புள்ளியியல் ஆகியவற்றுக்கு அறிமுகம். ஆறாம்பதிப்பு, டபிள்யூ. எச். ப்ரீமான் அண்ட்கோ, ஸான் ப்ரான்ஸிஸ்கோ, 1975.

துறைச்சொல் விளக்கம்.

அடுக்குநிகழ்வு விரைவு (Frequency): ஒரு நிகழ்ச்சி நிலையான தொரு கால இடையினில் மீண்டும் மீண்டும் நிகழும் போது, ஓர் அலகுக் காலத்தில் அது நிகழும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை.

எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு (Expectation) தொடர்ச்சியற்ற தொடர்பின்மைவகை மாறியல் மதிப்புரு ஒன்றின் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு, அதன் சாத்தியமான அனைத்து மதிப்புகள் மற்றும் அவற்றின் முறையான நிகழ்தகவுகள் ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

சார்பலன் (Function): ஓர் அளவுருவின் (y) மதிப்பு மற்றோர் அளவுரு

வின் (x) மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுதலி னால் மாறுதலடையும் போது, y, x இன் சார்பலன் எனப்படுகிறது.

சேர்மானம் (Combination): கணி தவியலில் பயன்படுத்தப்படுவது. பெரிய எண்ணிக்கையுள்ள (n) பொருள்களிடையிருந்து ஒரே சம யத்தில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை யுள்ள பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக் கும்போது சாத்தியமான சேர்மா னங்களின் எண்ணிக்கை.

திணையியல் அளவுரு (Parametion) பொதுவாக மாறுபட்டு, குறிப்பிட்ட தறுவாயில் மட்டும் நிலையான மதிப் புடைய அளவுரு.

தொகையிடல் (Integration) நுண்கணிதவியலில் (calcular) பயன் படுத்தப்படும் கணித முறை. வளை கோடுகளினுள் அடங்கியுள்ள பரப் பின் அளவுகள் நுண்ணளவுருக்களை (Infiniterimals) பயன்படுத்தும் வேறு கணக்குகளுக்கான தீர்வுகள்வுகள் ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்க உதவு வது.

தொடர்பின்மைவகை மாறியல்

மதிப்புரு (Random Variable): ஒரு பரிசோதனையின் விளைவு ஒன்றின் காரணமாக, முன்னதாகத் தெரியாத பல்வேறுமதிப்புக்களை ஏற்றுக் கொள்ளும் அளவுரு.

பெருக்கல் விருத்தி (Geometric Progression): ஒவ்வொர் உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பினை ஒரு நிலையான காரணியினால் பெருக்குவதனால் அமையும் அளவுருக்களின் தொடர். எடுத்துக்காட்டு: 1, 2, 4, 8, 16... என்பதில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பு 2 மடங்குள்ளதாயிருக்கிறது.

மாறுபாடு (Variance): தொடர் பின்மை வகை மாறியல் மதிப்புருவின் மதிப்புகள் அதன் சராசரிக்கு அருகாமையில், சராசரிக்குச் சற்றுக் கூடுதலாகவோ குறைவாகவோ பரவுதலைக்குறிப்பது. சராசரி மதிப்பிலிருந்து தள்ளியிருக்கும் விலகலளவின் வர்க்கச் சராசரிப் பரவின்படி.

மிகுநாள் ஆண்டு (Leap year): 366 நாட்கள், அதாவது, சாதாரண ஆண்டை (365 நாட்கள்) விட ஒரு

நாள் (பிப்ரவரி 29) அதிகம் கொண் ஆண்டு.

வர்க்கமூலம் (Square root): ஓர் எண்ணை அதே எண்ணினால் பெருக்கினால் அப்பெருக்குத்தொகை வர்க்கம் (Square)எனவும், அந்த எண் அப்பெருக்குத்தொகையின் ''வர்க்கமூலம்'' எனவும் சொல்லப்படுகிறது.

வரிசை மாற்றம் (Permutation): வெவ்வேறு பொருள்களின் குறிப்பிட்டதோர் எண்ணிக்கையை அமைக்கும் கணிதவியல் ஏற்பாடு, எடுத்துக்காட்டாக 1, 2, 3 என்னும் எண்களை ஆறு வரிசைகளில், 123, 132, 213, 231, 312, 321 என்று அமைக்க முடியும்.

லாகரிதம் (Logarithm) என்னும் எண், b என்னும் பிறிதோர் எண்ணின் அடுக்காகக் குறிப்பிடப் பட்டால், அதாவது, $a = b^n$ என்றால், என்பது அடுக்கு ''லாகரிதம்'' ஆகும். $n = \log_b^a$ சாதாரண லாகரிதங்களின் அடி 10. இவற்றின் உதவியினால் பெருக்கல், வகுத்தல் போன்ற கணக்கு முறைகள் எளிதாக்கப்படுகின்றன.

ஹஸ்டோகிராம் (Histogramme): புள்ளியியலில் பயன்படுத்தப்படும் குறிவரைவுப் படங்களின் (graphs) ஒரு வகை. இதில் அடுக்கு நிகழ்வு விரைவுப் பங்கீடுகள் செவ்வகங்களினால் குறிக்கப்பட்டிருக்கும்.

துறைச்சொல் வரிசை

அடுக்கு நிகழ்வு விரைவு	Frequency
அண்டவெளி	Cosmic space
அளவுரு	Quantity
இயல்நிலைப்படுத்தல்	Normalization
இயற்கணிதம்	Algebra
இயற்கைப் பிறழ்வு	Freak
உருவொழுங்கு	Regularity (of an object)
எண்கணிதம்	Arithmetic
எண்ணியல்	Numerical
எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு	Expectation
(கணிப்பான் கணிப்பொறி)	Computer
கிளைத்தேற்றம்	Corollary
கூட்டுச்சராசரி	Arithmetic mean
சமச்சீர்	Symmetry
சார்பலன்	Function
சிறும (குறைந்தபட்ச)	Minimum

செந்நிலை	Classical
சேர்மானம்	Combination
தற்செயல்நேர்வு (குருட்டிணைவு)	Chance
தாழி	Urn
திணையியல் நிலையளவுரு	Parameter
தேர்வாய்வுச் சோதனை	Trial
தொடர்ச்சியற்ற	Discrete
தொடர்பின்மை வகை	Random
மாறியல் மதிப்புரு	Variable
நிகழ்தகவு	Probability
நிழ்க வியல்பு	Likelihood
நுனிப்பு	Observation
பங்கீடு	Distribution
புள்ளியியல்	Statistics
பெருக்கல் விருத்தி	Geometric progression
பெரும் (அதிகப்பட்ச)	Maximum
முன்வரையறை (நிபந்தனை)	Condition
லாகரிதம்	Logarithm
வர்க்கமூலம்	Square root
வரம்பு (எல்லை)	Limit
வரிசை மாற்றம்	Permutation
வரையுட்படு தொகை	Integral
ஹிஸ்டோகிராம்	Histogramme
தொகையிடுதல்	integration

ISBN 5-03-00-1419-5